PERIODICAL UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

54. BAND, 2. HEFT
MIT 5 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM MAI 1950)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1950

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

54. Band/2. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Hlawka, E. Integrale auf konvexen Körpern II. 81

Hlawka, E. Über die Zetafunktion konvexer Körper 100

Müller, H. R. Über eine infinitesimale kinematische Abbildung 108

Hornich, H. Zur Auflösung von Gleichungssystemen 130

Schmetterer, L. Über einen Satz von Hardy und Littlewood 135

Hohenberg, F. Eine einfache Fläche achter Ordnung 140

Buchbesprechungen 157

Integrale auf konvexen Körpern II.

Von
Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 23. August 1949.)

Einleitung.

Diese Arbeit stellt eine Fortsetzung der gleichbetitelten Arbeit in dieser Zeitschrift, Bd. 54, dar (im folgenden kurz mit I zitiert).

Es sei B ein konvexer Körper $f(x) \leqq 1$ (f sei seine Eich- und H seine Stützfunktion) im R_m ($m \geqq 2$), der den Koordinatenursprung o im Innern enthält, dessen Rand $S(B)$ 6 $(m+2)$-mal stetig differenzierbar ist und dessen Tangentialebenen Berührungen von genau erster Ordnung besitzen. Diese Voraussetzung über B ist in dieser Arbeit, wenn nichts anderes bemerkt ist, stets als erfüllt angenommen.

§ 1 und § 2 bringen Verschärfungen von Sätzen aus I, § 3 und § 4. Der Hauptteil der Arbeit ist der Untersuchung der Nullstellen von $G(l) = \int\limits_B e^{il\,x}\,dx$ (l Vektor des R_m, dx Volumselement) gewidmet. Es wird im wesentlichen folgendes gezeigt. Besitzt B einen Mittelpunkt (in 0), dann erfüllen die Nullstellen, von endlichvielen Ausnahmen abgesehen, unendlichviele konvexe Flächen L_k mit Mittelpunkt in 0, welche sich für $|l| \longrightarrow \infty$ den Flächen $H(l) = \dfrac{(m+1)\pi}{4} + (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ asymptotisch nähern (k natürliche Zahl). Besitzt B keinen Mittelpunkt, so liegen nur auf gewissen Halbstrahlen durch 0 unendlich viele Nullstellen von G, welche vollständig charakterisiert werden (§ 6). Ist $m = 2$ (Ebene), so verschwindet $G(l)$ dann und nur dann auf unendlich vielen Kurven von der Gestalt $H(l) = \text{Const}$, wenn B eine Ellipse ist. Dieser Satz stellt eine transzendente Charakterisierung der Ellipse dar. Es ist wohl bekannt, daß die Bedingung hinreichend ist. In § 6 betrachten wir noch kurz die „Extremflächen" von $|G(l)|$.

Es sei noch bemerkt, daß sich die Voraussetzung über B abschwächen ließe, doch gehen wir darauf nicht näher ein.

§ 1.

Es soll zunächst folgender Satz gezeigt werden:

Satz 1: Es ist für großes $\omega > 0$

$$G = \int_B e^{i\omega x_1} dx = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m+1}{2}}} (e^{i\omega H(e)} a_0 + e^{-i\omega H(-e)} b_0 + 0(\tfrac{1}{\omega})), \quad (1)$$

wo

$$a_0 = \sqrt{K(e)}\, e^{-\frac{i(m+1)\pi}{4}}, \; b_0 = \sqrt{K(-e)}\, e^{\frac{i(m+1)\pi}{4}}, \; e = (1, 0, \ldots 0) \quad (2)$$

Dieser Satz ist eine Verschärfung von I, Satz 2, für $k = 0$, wo statt $0(\omega^{-1})$ nur $0(\omega^{-\frac{1}{2}})$ gezeigt ist.

Wir schicken zunächst einen Hilfssatz vorweg:

Hilfssatz 1: Es sei $m \geqq 3$, $F_0 = \sum_{i,j=2}^{m} H_{ik}(e) a_i a_k$, $\sum_{i=2}^{m} a_i^2 = 1$, $d\bar{\sigma}$ das Oberflächenelement der $m-1$-dimensionalen Einheitskugel E_{m-1} und

$$\mathfrak{J}(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \int_{E_{m-1}} \frac{a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}}{F_0^{\frac{m+r-1}{2}}} d\bar{\sigma} \quad (3)$$

($r \geqq 1$, i_j beliebige Zahlen aus $[2, m]$), dann ist

$$\mathfrak{J}(i_1) = \mathfrak{J}(i_1, i_2, i_3) = 0, \; \mathfrak{J}(i_1, i_2) = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}} A_{i_1 i_2}}{\Gamma(\frac{m+1}{2}) (K(e))^{\frac{3}{2}}}, \quad (4)$$

wo $A_{i_1 i_2}$ die Adjungierte zu $H_{i_1 i_2}(e)$ in $\operatorname{Det} H_{ik}(e) = K(e)$.

Beweis: Es wurde bei dem Beweis von I, Satz 3, gezeigt (vgl. I, § 3 (23) ff.), daß

$$\int \frac{d\bar{\sigma}}{F_0^{\frac{m-1}{2}}} = \int d\bar{\sigma} (\Sigma H_{ik}(e) a_i a_k)^{-\frac{m-1}{2}} = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m-1}{2}) (\operatorname{Det} H_{ik})^{\frac{1}{2}}}$$

Differenzieren wir nach $H_{i_1, i_2}(e)$, dies ist gestattet, so folgt sofort der angegebene Wert von $\mathfrak{J}(i_1, i_2)$ in (4).

Bei $\mathfrak{J}(i_1)$ gehen wir so vor: Durch eine orthogonale Transformation können wir F_0 in $\Sigma \lambda_i a_i^2$ überführen, dabei geht $\mathfrak{J}(i_1)$ in $\sum_{i=2}^{m} c_i \int a_i (\Sigma \lambda_i a_i^2)^{-\frac{m}{2}} d\bar{\sigma}$ über und daraus folgt sofort $\mathfrak{J}(i_1) = 0$. Durch Differentiation dieses Integrals nach $H_{i_2 i_3}(e)$ folgt sofort derselbe Wert für $\mathfrak{J}(i_1, i_2, i_3)$.

Jetzt zum Beweis von Satz 1. Es sei $m \geqq 3$ (für $m = 2$ ist es noch leichter einzusehen), dann ist nach I, § 3 (10) zunächst

$$\int_0^{\pi} e^{i\omega x_1} g(\vartheta)\, d\vartheta,\ g(\vartheta) = K \sin^{m-2}\vartheta \cos\vartheta \tag{5}$$

zu betrachten und I, § 2, Hilfssatz 1 mit $a = 0$, $b = \pi$, $f(\vartheta) = x_1$, $g(\vartheta)$ anzuwenden. In $\vartheta = 0$, bzw. $\vartheta = \pi$ ist nach I, § 3 (18) $g^{(j)}(\vartheta) = 0$ $(j < m-2,\ \vartheta = 0,$ bzw. $\pi)$

$$\left.\begin{aligned} g^{(m-2)}(0) &= (m-2)!\, K_0,\ g^{(m-2)}(\pi) = (-1)^{m-1}(m-2)!\, K_\pi \\ g^{(m-1)}(0) &= (m-1)!\, (K_\vartheta)_0,\ g^{(m-1)}(\pi) = (-1)^m (m-1)!\, (K_\vartheta)_\pi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun ist $\dfrac{\partial K}{\partial \vartheta} = -\dfrac{\partial K}{\partial u_1}\sin\vartheta + \sum_{i=2}^{m} \dfrac{\partial K}{\partial u_i} a_i \cos\vartheta$, also $(K_\vartheta)_0 = \sum_{i=2}^{m} K_i(e)\, a_i$. Weiter war nach I, § 3 (15)

$$F(\vartheta, a) = H_{11} + \sum_{i,k=2}^{m} H_{ik}\, a_i a_k, \text{ also da } H_{11k}(e) = 0$$

$$(F_\vartheta)_0 = \sum_{i,k,l=2}^{m} H_{ikl}(e)\, a_i a_k a_l \tag{7}$$

Nach den oben erwähnten I, Hilfssatz 1 (vgl. I, § 2 und (A)) ist wegen (6) (vgl. I, § 3 (20))

$$\int_0^{\pi} e^{i\omega x_1} g\, d\vartheta = \tfrac{1}{2} \sum_{j=m-2}^{k+m-2} \left(A_j e^{i(\omega x_1(e) - \frac{(j+1)\pi}{4})} + \right.$$

$$\left. + (-1)^j B_j e^{i(\omega x_1(-e) + \frac{(j+1)\pi}{4})}\right) \omega^{-\frac{j+1}{2}} + 0\left(\omega^{-\frac{m+k}{2}}\right) \tag{8}$$

A_{m-2} und B_{m-2} wurden bereits in I, § 3 berechnet.

Für A_{m-1} und A_m gilt z. B., wie man aus I, § 2 (A) wegen (6) entnimmt:

$$A_{m-1} = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{m}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}F_0\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)} + \frac{1}{3!(m-2)!} g^{(m-2)}(F')F_0^{-1}\right) \tag{9}$$

$$A_m = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{m+1}{2})(\tfrac{1}{2}F_0)^{-\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1}{m!}\,g^{(m)} + \frac{m+1}{3!\,F_0}\left(\frac{1}{(m-1)!}\,g^{(m-1)}F' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4\,(m-2)!}\,g^{(m-2)}F''\right) + \frac{(m+1)(m+3)}{3\,.\,4.6\,(m-2)!}\,g^{(m-2)}(F')^2F_0^{-2}\right)$$

Dabei sind die Ableitungen an der Stelle $\vartheta = 0$ zu nehmen. Aus (8) folgt zunächst wie in I, § 3 (21)

$$i\,\omega\,G = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\omega^{\frac{m-1}{2}}}\sum_{j=0}^{k}\left(a_j^*\,e^{i\,\omega\,x_1(e)} + b_j^*\,e^{i\,\omega\,x_1(-e)}\right)\omega^{-\frac{j}{2}} + 0\,(\omega^{-\frac{m+k}{2}})$$

Es wurden a_0^* und b_0^* bereits in I, § 3 berechnet. Um nun z. B. a_1^* zu bestimmen, müssen nach (9) die Integrale $\int\limits_{E_{m-1}} g^{(m-1)}(0)\,F_0^{-\frac{m}{2}}\,d\bar{\sigma}$ und $\int g^{(m-2)}_{(0)}F'_{(0)}F_0^{-\frac{m}{2}-1}\,d\bar{\sigma}$ berechnet werden. Aus (6), (7) und Hilfssatz 1 (4) folgt aber, daß diese Integrale 0 sind, also auch a_1^*. Ebenso zeigt man dies bei b_1^* und damit ist alles gezeigt.

§ 2.

Satz 2: Ist k eine natürliche Zahl $\geqq 0$ und ist der Rand von B sogar $6\,(m+k+2)$-mal stetig differenzierbar, so gilt mit $\delta = \frac{k}{2}$, wenn $B_t : f(x) \leqq t$ für

$$\mathfrak{J}_\delta = \int\limits_{B_t}(t^2 - f^2)^\delta\,e^{i\,l\,x}\,d\,x$$

$$\mathfrak{J}_\delta = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,2^\delta\,\Gamma(\delta+1)\,\frac{t^{\frac{m-1}{2}+\delta}}{|l|^{\frac{m+1}{2}+\delta}}\left[\frac{\sqrt{K_+}}{H_+^\delta}\,e^{i\,|l|\,H_1 - \frac{\pi}{2}\,(\delta + \frac{m+1}{2}))_+}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{K_-}}{H_-^\delta}\,e^{-i\,(|l|\,H - \frac{\pi}{2}\,(\delta+\frac{m+1}{2}))} + 0\left(\frac{1}{t\,|l|}\right)\right] \qquad (1)$$

Dabei ist $H_\pm = H_\pm(e_l)$, wo $e_l = \frac{l}{|l|}$, analog ist $K_\pm$ definiert.

Dieser Satz ist für $\delta = \frac{k}{2}$ eine Vertiefung und Verschärfung von I, § 4, Satz 3.

Beweis: Nach I, § 4 genügt es, den Fall $l = \omega e$, $(e = (1, 0 \ldots 0))$, $t = 1$ zu betrachten. Es sei im R_{m+k} $\overline{B}$ der konvexe Körper $f^2 + y_1^2 + \ldots + y_k^2 \leqq 1$. Dann ist

$$\int_{\overline{B}} e^{i\omega x_1}\, dx\, dy = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} \int_{f\leqq 1} (1-f^2)^{\frac{k}{2}}\, e^{i\omega x_1}\, dx \qquad (2)$$

Auf die linke Seite von (2) ist § 1, Satz 1 dieser Arbeit anwendbar, da $\overline{B}$ alle Voraussetzungen erfüllt. Es sei $\overline{K}_{\pm}$, bzw. $\overline{K}_-$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien des Randes von $\overline{B}$ in den $m + k$-dimensionalen Einheitsvektoren $\pm (e; \underbrace{0, \ldots 0}_{k})$, analog sei $\overline{H}_{\pm}$ definiert, wo $\overline{H}$ die Stützfunktion von $\overline{B}$ ist, dann ist

$$\frac{\pi^{\delta}}{\Gamma(\delta+1)}\mathfrak{S}_{\delta} = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}+\delta}}{\omega^{\frac{m+1}{2}+\delta}} \Big[\sqrt{\overline{K}_+}\; e^{i(\omega \overline{H}_+ - \frac{\pi}{2}(\frac{m+1}{2}))+\delta} +$$

$$+ \sqrt{\overline{K}_-}\; e^{i\omega \overline{H} - \frac{-\pi}{2}(\frac{m+1}{2}+\delta))} + 0\,(\frac{1}{\omega})\Big]$$

Wenn wir noch zeigen, $\overline{H}_{\pm} = H(\pm e)$, $\overline{K}_{\pm} = K(\pm e)\,(H(\pm e))^{-k}$, so ist alles gezeigt. Es genügt $\overline{B}: f^2 + y^2 \leqq 1$ zu betrachten, denn vollständige Induktion nach k liefert das Gewünschte.

Es ist also zu zeigen:

Hilfssatz 2: Besitzt die Fläche F im $R_m: f(x) = 1$ in der Richtung $e = (1, 0 \ldots 0)$ die Stützfunktion $H_+ = H(e)$ und das Produkt der Hauptkrümmungsradien $K(e)$, so ist für die Fläche $\overline{F}: f^2 + y^2 = 1$ in $\bar{e} = (e, 0)$ die Stützfunktion $\overline{H} = H(e)$ und das Produkt der Hauptkrümmungsradien $\overline{K}(e) = \dfrac{K}{H}$.

Beweis: Zunächst ist $\overline{H}(\bar{e}) = \operatorname{Max} x_1$. Nun ordnen wir jeden Punkt (x, y) von F' einen Punkt x^0 von F so zu, daß $x = \varepsilon\, x^0 \sqrt{1-y^2}$ (bei passenden $\varepsilon = \pm 1$). Das geht, dann ist $\overline{H}(\bar{e}) = \operatorname{Max} \varepsilon\, x_1^0 \sqrt{1-y^2} = \operatorname{Max} x_1^0 = H(e)$. Den Punkt $\overline{x}^0(e)$ bezeichnen wir kurz mit $\overline{x}^0$. Dann betrachten wir die zweidimensionale Ebene senkrecht auf den R_m durch die Normale von $(\overline{x}^0, 0)$, deren Richtung, nach obigen e ist. Diese schneidet aus $\overline{F}$ eine Kurve C aus, deren Parameterdarstellung wir zunächst bestimmen.

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$-\bar{x}_i^0 + H_i(V_1, \ldots V_m)\cos\varphi = 0 \quad i = 2, 3, \ldots m \qquad (3)$$
$$-1 + V_1^2 + \ldots + V_m^2 = 0$$

Dieses System besitzt für $\varphi = 0$ die Lösung $(v_1, \ldots v_m) = e$.
Weiter ist $H_{i1}(e) = 0$ und die Funktionaldeterminante in $(e; \varphi = 0)$ ist

$$\left| \begin{array}{c|} \dfrac{\partial H_i}{\partial v_k} \\ v_1, \ldots v_m \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \\ e; \varphi = 0 \end{array} \right| = \left| \frac{\partial H_i}{\partial v_k} \right|_e = K > 0.$$

Also ist (3) nach $v_1, \ldots v_m$ in einer genügend kleinen Umgebung von $\varphi = 0 : |\varphi| \leqq \eta$ auflösbar: $v_i = v_i(\varphi)$ mit $v_i(0) = 0\ 2 \leqq i \leqq m$ $v_1(0) = 1$). Die Ableitungen der v_i nach φ sind vorhanden und aus (3) folgt:

$$\sum_{k=2}^{m} H_{ik}(e)\,\dot{v}_k(0) = 0 \quad (i = 2, \ldots m),\ \dot{v}_1(0) = 0$$

Da Det. $H_{ik}(e) = K > 0$ so folgt $\dot{v}_k(0) = 0 \quad k = 1, \ldots m$.

Setzen wir für $|\varphi| \leqq \eta$

$$x_1 = \Phi(\varphi)\cos\varphi,\ y = \sin\varphi, \Phi(\varphi) = H_1(v_1(\varphi), \ldots v_m(\varphi)),$$

so erfüllt diese Kurve wegen (3) die Gleichung $f^2(x_1, \bar{x}_2^0, \ldots \bar{x}_m^0) + y^2 = 1$, denn es ist $f(H_1(e), \ldots, H_m(e)) = 1$, geht durch $(\bar{x}^0, 0)$, liegt in der zweidimensionalen Ebene durch e und steht senkrecht auf dem R_m. Wir berechnen nun den Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}$ von C in $\varphi = 0$.

(Der Punkt bedeutet Ableitung nach φ).

Es ist $\dot{x} = \dot{\Phi}\cos\varphi - \Phi\sin\varphi$, $\dot{y} = \cos\varphi$, also $\dot{y}(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \dot{\Phi}(0) = \sum_{k=1}^{m} H_{1j}(e)\,\dot{v}_j(0) = 0$. Weiter ist $\ddot{x}(0) = \ddot{\Phi}(0) - \Phi(0)$. Nun ist $\ddot{\Phi}(0) = \sum_{i,k=1}^{m} H_{1\,1\,k}(e)\,\dot{v}_i(0)\,\dot{v}_k(0) + \sum_{k=1}^{m} H_{1\,k}(e)\,\ddot{v}_k(0)$. Nun ist $H_{1\,k}(e) = 0$, also $\dot{\Phi}(0) = 0$, $\Phi(0) = H_1(e) = H(e)$, also $\ddot{x}(0) = -H(e)$, also $\varrho = \dfrac{1}{H}$. Aus der Definition von $\overline{K}$ folgt $\overline{K} = K \cdot \dfrac{1}{H}$ und damit ist der Hilfssatz bewiesen. Man kann Satz 2 auf beliebiges $\delta \geqq 0$ übertragen. Wir begnügen uns mit dem folgenden

*Satz 3**: Ist $\delta \geqq 0$ und erfüllt der Rand von B die Bedingungen von Satz 2 mit einem ganzen $k \geqq 0$, so daß $0 < \delta - \dfrac{k}{2} < 1$, so gilt

wieder Satz 2. Es ist nur das 0-Glied durch $0\ (t\,|\,l\,|)^{-\frac{1}{2}})$ zu ersetzen. Wir deuten den Beweis nur kurz an, und zwar für $l = \omega\, e$, $t = 1$. Es ist nach I, § 7 (4)

$$L_\delta(l, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int\limits_{f^2 \leqq u} (u - f^2)^\delta\, e^{i\,l\,x}\, d\,x \tag{4}$$

Dann folgt sofort, daß für jedes δ' mit $0 < \delta' < \delta$

$$L_\delta(l, u) = \frac{1}{\Gamma(\delta-\delta')} \int\limits_0^u L_{\delta'}(v, y)\,(u-v)^{\delta-\delta'-1}\, d\,v \tag{5}$$

Wir nehmen nun $\delta' = \frac{k}{2}$, dann ist also

$$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\,\mathfrak{J}_\delta = L_\delta(e, 1) = \frac{1}{\Gamma(\delta-\frac{k}{2})} \int\limits_0^1 L_{\frac{k}{2}}(v, y)\,(1-v)^{\delta-\frac{k}{2}-1}\, dv.$$

Geht man so vor, wie in I, § 4, unter Benützung von Satz 2, so folgt die Behauptung.

§ 3.

Wir setzen jetzt voraus, daß B einen Mittelpunkt besitzt, welchen wir in 0 annehmen. Es sollen nun die Nullstellen von

$$G(l) = \int\limits_{f \leqq 1} e^{i\,l\,y}\, d\,y \tag{1}$$

untersucht werden. Da B einen Mittelpunkt besitzt, so ist mit l auch $-l$ eine Nullstelle. Ist B sogar symmetrisch in bezug auf einen R_ε $(1 \leqq k \leqq m-1)$ durch 0, so ist mit l auch l^* Nullstelle von (1), wenn l^* das Spiegelbild von l in bezug auf den R_k ist. Dann folgt aber nach obigen, daß auch $-l^*$ Nullstelle ist, welche aus l durch Spiegelung an den R_{n-k} durch 0 senkrecht auf den R_k entsteht. Die obige Behauptung sieht man so ein: Nach Voraussetzung ist $G(l) = 0$. Nun soll B durch Spiegelung an den R_k in sich übergehen. Dabei geht jeder Punkt y von B in sein Spiegelbild y^* über. Da nun $l\,y$ eine Bewegungsinvariante ist, so geht $l\,y^*$ in $l^*\,y$ über und damit ist alles gezeigt.

Da B einen Mittelpunkt in 0 besitzt, ist (1) reell. Wir setzen nun $l = r\,u$, $|\,u\,| = 1$ und halten zunächst den Halbstrahl u durch 0 fest. Dann betrachten wir die Funktion in r:

$$F(r) = G(u\,r) = \int\limits_B e^{i\,r\,u\,y}\, d\,y.$$

$F(r)$ ist analytisch in r, besitzt daher auf jeden Intervall $[0, r_0]$

$(r_0 > 0)$ nur endlich viele Nullstellen. Wir geben uns ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ vor und wählen $r_0(\varepsilon)$ so groß, daß nach I, Satz 2 unter Berücksichtigung von § 1, Satz 1 dieser Arbeit für $r > r_0$

$$F(r) = \frac{c\sqrt{K(u)}}{r^{\frac{m+2}{2}}}\left(\cos\left(r\,H(u) - \frac{(m+1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right) \tag{2}$$

mit

$$0\left(\frac{1}{r}\right) < \tfrac{1}{2}\sin\varepsilon \tag{3}$$

und

$$F'(r) = i\int u\,y\,e^{iruy}\,dy = \frac{c\,H(u)\sqrt{K(u)}}{r^{\frac{m+1}{2}}}\left(\cos\left(r\,H(u) - \frac{(m+1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right) \tag{4}$$

mit

$$0\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) < \frac{\cos\varepsilon}{2} \tag{4'}$$

Dies geht nach I, § 3 (5) und (6). (Wir gehen auf (4) in § 4 noch näher ein). Dabei ist $c = 2\,(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}$.

Wir betrachten nun auf den Halbstrahl u die Punktepaare

$$r_{\pm}^{(k)}\,H(u) = C(k) \pm \varepsilon,\ C(k) = \frac{(m+1)\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2} \tag{5}$$

Dabei durchläuft k alle natürlichen Zahlen $\geqq k_0$, wo k_0 so groß gewählt sei, daß alle $r_{\pm}^{(k)} > r_0$ sind.

Dann stellt man durch Einsetzen in (2) wegen (3) sofort fest:

$$F(r_{-}^{(k)}) > 0,\ F(r_{+}^{(k)}) < 0. \tag{6}$$

Da $F(r)$ stetig ist, so gibt es mindestens ein $r^{(k)}$ in $i_k = (r_{-}^{(k)}, r_{+}^{(k)})$, so daß $F(r^{(k)}) = 0$. Es besitzt also $F(r)$ auf jedem Halbstrahl u unendlichviele Nullstellen. In jedem i_k liegt aber nur eine einfache Nullstelle, denn nach (4), (4') ist in i_k, $F'(r) \neq 0$. Außerhalb der Intervalle i_k liegt, wenn k_0 genügend groß, keine Nullstelle, denn wird ein Intervall $[r_{+}^{(k)}, r_{-}^{(k+1)}]$ betrachtet, so ist in diesem Intervall nach (2) $F(r) \neq 0$. Daraus folgt

Hilfssatz 3: $F(r)$ besitzt auf jedem Halbstrahl u unendlichviele einfache Nullstellen $r^{(k)}$ und diese liegen bei vorgegeben $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ für $k > k_0(\varepsilon)$ bis auf endlichviele in den Intervallen $i_k = [r_-^{(k)}, r_+^{(k)}]$, wo

$$r_\pm^{(k)} H(u) = \frac{(m+1)\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon \tag{5}$$

Halten wir nun ein $k > k_0$ fest, dann gibt es auf jedem Halbstrahl u eine Nullstelle $r^{(k)}(u)$, welche einfach ist.

Diese Nullstellen $r^{(k)}$ erfüllen den Rand L_k eines Sternbereiches, also eines zusammenhängenden Gebietes, mit 0 als Mittelpunkt. Wir erhalten unendlich viele solcher L_k. Es hat L_k die Gestalt

$$F(r,u) = \int_B e^{i r u y}\, dy = 0 \quad r \text{ in } i_k(u) = [r_-^{(k)}(u), r_+^{(k)}(u)] \tag{7}$$

Es ist wegen (4), (4') $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r^{(k)}(u), u) \neq 0$, wenn $F(r^{(k)}(u), u) = 0$ für jedes u. Wir lassen im folgenden den Index k weg, wenn kein Mißverständnis möglich ist. Es existieren alle Ableitungen nach r und u_i $(u = (u_1, \ldots, u_m))$, also kann (7) nach r in einer passenden Umgebung von $(r^{(k)}(u), u)$ mit $|u| = 1$ aufgelöst werden:

$$r = \Psi(u) \tag{8}$$

wo $\Psi(u) = \Psi(-u)$ und analytisch in u ist. Wir machen den Ansatz:

$$r = \Psi(u) = C(k) H^{-1}(u) + \Phi(u,k) \tag{9}$$

Setzen wir dies in $F(r,u) = 0$ ein, so kommt wegen (2) $\Phi(u,k) = 0(\frac{1}{k})$, also

$$r = \left(\frac{(m+1)\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) H^{-1}(u) + 0\left(\frac{1}{k}\right) \tag{9'}$$

Damit erhalten wir

Satz 4: Besitzt B einen Mittelpunkt (in 0), so gibt es unendlichviele Flächen L_k, auf denen $G(l) = \int_B e^{i l y}\, dy$ verschwindet und diese sind konvex für $k > \bar{k}$, wenn $\bar{k}$ genügend groß.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die L_k konvexe Flächen sind. Da L_k der Rand eines zusammenhängenden Gebietes S_k ist, so genügt es nach einem Satz von Tietze (Bonnesen-Fenchel, S. 7) zu beweisen, daß es in jedem Punkt P von L_k eine Stützhalbkugel gibt. Dies ist sicher

der Fall, wenn die Tangentialebene von L_k in P (welche sicher vorhanden) in einer genügend kleinen Umgebung von P keinen Bereichpunkt von S_k trifft. Wir müssen also zeigen, daß jede Tangente durch P in einer Umgebung von P keinen Bereichpunkt von S_k trifft. Daher gehen wir so vor: Wir nehmen einen Punkt P von $L_k : r = \Psi(u)$ her o. B. d. A. für $u = e = (1, 0, \ldots 0)$ und betrachten alle zweidimensionalen Ebenen durch $\overline{O\,P}$. Diese schneiden aus L_k Kurven $r = \varphi(\vartheta)$ aus, welche durch P gehen. Wir werden zeigen, daß der Krümmungsradius ϱ einer solchen Kurve in P stetig und > 0 ist. Dann folgt (vgl. z. B. *Bieberbach*, Differentialgeometrie, S. 10ff.), daß in einer Umgebung um P die Radiusvektoren der Schnittkurven in einer Richtung $u <$ Radiusvektoren der Tangenten an diesen Kurven in P ebenfalls in der Richtung u sind. Da unter diesen Tangenten an den Schnittkurven in P jede Tangente der Tangentialebene von P auftreten muß, so folgt dann, daß die Tangentialebene in P in einer genügendkleinen Umgebung von P keinen Bereichpunkt trifft. Damit ist dann die Behauptung bewiesen.

Es ist also noch zu zeigen, daß jede ebene Schnittkurve durch P von L_k positive Krümmung besitzt. O. B. d. A. sei also $u = e$, $r^{(k)} = \Psi(e)$. Jede zweidimensionale Ebene durch e kann in der Parametergestalt

$$x = r \cos\vartheta\, e + r \sin\vartheta\, \bar{a} \tag{10}$$

geschrieben werden, wo $\bar{a} = (0, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_m)$ mit $|\bar{a}| = 1$ fest.

Es ist also $u(\vartheta) = (\cos\vartheta, \bar{a}_2 \sin\vartheta, \ldots, \bar{a}_m \sin\vartheta)$, dann lautet die Gleichung der Schnittkurve

$$r^{(k)} \varphi(\vartheta) = \Psi(u(\vartheta))$$

Da Ψ beliebig oft differenzierbar, so ist es auch $\varphi(\vartheta)$. Wir haben nun das Vorzeichen des Krümmungsradius $\varrho = \varrho(k) = \dfrac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r\,r''}$, also das von $r^2 + 2r'^2 - r\,r''$ in $\vartheta = 0$ zu bestimmen. (Die Striche bedeuten Ableitungen nach ϑ).

Nach (7) gilt $F(r, u(\vartheta)) = 0$, also

$$\Theta(r, \vartheta) = F(r, u(\vartheta)) = \int_B e^{i r u(\vartheta) y}\, d\,y = 0 \quad r \text{ in } i_k$$

Dann ist

$$r'(0) = -\Theta_\vartheta \,|\, \Theta_r,\ r''(0) = -(\Theta_{rr}\, r'^2(0) + 2\,\Theta_{r\vartheta}\, r'(0) + \Theta_{\vartheta\vartheta}) \,|\, \Theta_r$$

wo die Ableitungen für $\vartheta = 0$, $r = r^{(k)}$ zu nehmen sind. Weiter ist nach (9) sicher

$$r^{(k)} = \frac{C(k)}{H(e)} + 0(1) \tag{9'}$$

Setzen wir weiter, bei beliebigem λ,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= i \int y_1 e^{i r y_1} d y, \mathfrak{J}_2 = i \int \bar{a} y e^{i r y_1} d y \\ Q(\lambda) &= \int (\lambda y_1 - (\bar{a} y))^2 e^{i r y_1} d y = \lambda^2 \mathfrak{J}_{11} - 2 \lambda \mathfrak{J}_{1\,2} + \mathfrak{J}_{2\,2} \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

dann ist

$$\left.\begin{aligned} \Theta_r = \mathfrak{J}_1, \Theta_\vartheta = r \mathfrak{J}_2, \Theta_{r\,r} = -\mathfrak{J}_{1\,1}, \Theta_{r\,\vartheta} = -r \mathfrak{J}_{1\,2} + \mathfrak{J}_2 \\ \Theta_{\vartheta\,\vartheta} = -r^2 \mathfrak{J}_{2\,2} - r \mathfrak{J}_1 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

für $\vartheta = 0, r = r^{(k)}$. Nach (4), (4') ist $\mathfrak{J}_1 \neq 0$ für $k > 0$. Wir setzen weiter

$$\mathfrak{J} = Q(\lambda_0) = \int \left(\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} y_1 - (\bar{a} y)\right)^2 e^{i r y_1} d y, \lambda_0 = \frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} \tag{12}$$

Es ist dann $r^2 + 2 r'^2 - r r'' = -r^3 \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_1}$ für $\vartheta = 0$, $r = r^{(k)}$. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $\operatorname{sgn} \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_1} < 0$ für $k > \bar{k}$, wenn $\bar{k}$ genügend groß und wir sind fertig, da ϱ stetig von $\bar{a}$ abhängt.

Wir werden sogar folgendes zeigen: Ist $\varrho_0 = \varrho_0(k)$ der Krümmungsradius der Kurve $r = \frac{C(k)}{H(u(\vartheta))}$ in $\vartheta = 0$ (vgl. (9)), dann ist

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + 0\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right). \tag{13}$$

§ 4.

Um die restlichen Behauptungen von § 3 zu zeigen, müssen wir die asymptotischen Entwicklungen der Integrale von § 3 (10) aufstellen. Wir gehen wie in I, § 3 vor unter steter Benützung des Hilfssatzes 1 aus I, § 2. Wir werden nur die Hauptpunkte angeben und auch die Bezeichnungen von I, § 3 übernehmen. Zunächst ist unter Benützung des *Gaußschen* Integralsatzes

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{r}\left[\int_{S(B)} y_1 e^{i r y_1} u_1 \, do - \frac{1}{r} \int e^{i r y_1} u_1 \, du\right] \tag{1}$$

Dann ist zunächst das zweite Integral in (1) $0\left(r^{-\frac{m-1}{2}}\right)$. Weiter ist, wenn $u_1 = \cos\vartheta$ gesetzt wird, bei $\int y_1 e^{i r y_1} \cos\vartheta \, d o$ unser $g = y_1 K \sin^{m-2}\vartheta \cos\vartheta = \vartheta^{m-2}[(y_1 K)_0 + \vartheta (y_1' K + y_1 K')_0 + \ldots]$.

Nach I, § 3 (14) ist $y_1'(0) = 0$, $K'_0 = \sum_{i=2}^{m} K_i(e)\, a_i$, also $g^{(j)}(0) = 0$ für $j < m-2$, $g^{(m-2)}(0)/(m-2)! = (y_1 K)_0$, $g^{(m-1)}/(m-1)! = (y_1 K')_0$.

Daraus folgt

$$\int y \cdot e^{i r y_1} u_1 \, d o = \frac{c\sqrt{\bar{K}}\, H}{r^{\frac{m-1}{2}}} \left(\cos\left(r H - \frac{(m-1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right) \tag{2}$$

Es ist natürlich K und H für $u = e$ zu nehmen. Dabei wurde schon berücksichtigt, daß das Glied der Größenordnung $0(r^{-\frac{1}{2}})$ in der Klammer von (2) verschwindet. Das zeigt man wie in § 1, Satz 1 dieser Arbeit. Es ist also

$$\Im_1 = \frac{c\sqrt{\bar{K}}\, H}{r^{\frac{m+1}{2}}} \left[\cos\left(r H - \frac{(m-1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right]. \tag{3}$$

Es ist $\Im_2 = i \int \bar{a}\, y\, e^{i r y_1} d y = \frac{1}{r} \int_S \bar{a}\, y\, e^{i r y_1} u_1 \, d o$.

Hier ist $g = K(\bar{a}\, y) \cos\vartheta \sin^{m-2}\vartheta = \vartheta^{m-2}(K(\bar{a}\, y)_0 + \vartheta\,((\bar{a}\, y)' K + K'(\bar{a}\, y))_0 +)$.

Es ist $(\bar{a}\, y)'_0 = F_0(\bar{a}, a) = \sum_{i,k=2}^{m} H_{ik}(e)\, \bar{a}_k\, a_i$. Daraus folgt wieder, daß die Überlegung von § 1, Satz 1 anwendbar ist und

$$\Im_2 = \frac{c\sqrt{\bar{K}}\, \bar{a}\, y_0}{r^{\frac{m+1}{2}}} \left[\cos\left(r H - \frac{(m-1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right], \tag{4}$$

wo $y_0 = (y_2(e), \ldots y_m(e))$, $c = 2(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}$.

Nun sind die Integrale für $r = r^{(k)}$ zu nehmen, also folgt wegen (9'), $du\, r^{(k)} H(e) = C(k) + 0(1)$

$$\lambda_0 = \frac{\Im_2}{\Im_1} = \frac{\bar{a}\, y_0}{H(e)} + 0\left(\frac{1}{r}\right) \qquad r = r^{(k)} \tag{5}$$

Jetzt betrachten wir $\Im$ aus § 3 (12) und wenden wieder den *Gauß*schen Integralsatz an. Dann kommt

$$\Im = \frac{1}{r}(T_1 + T_2 + T_3), \tag{6}$$

wo

$$T_1 = \frac{1}{i} \int e^{i r y_1} (\lambda_0 y_1 - \bar{a} y)^2 u_1 do,\ T_2 = \frac{2}{r} \int e^{i r y_1} (\lambda_0 y_1 - \bar{a} y) u_1 do$$
$$T_3 = \frac{2}{r^2} \int e^{i r y_1} \bar{a} y u_1 do \qquad (7)$$

Es werde zuerst T_1 behandelt. Hier ist $g = K (\lambda_0 y_1 - \bar{a} y)^2 \sin^{m-2} \vartheta \cos \vartheta$.

Setzen wir $\gamma_1 (\vartheta) = \lambda_0 y_1 - \bar{a} y$, so ist nach (5), da $(y_1)_0 = H_1 (e) = H (e)$, $\gamma_1 (0) = 0 (r^{-1})$. Weiter ist, da $(y'_1)_0 = 0$ nach I, § 3 (14),

$$\gamma_1' (0) = -\bar{a} (y)'_0 = -\bar{a} \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial y}{\partial u_i} (e) a_i = -\sum_{i,k=2}^{m} H_{ik} (e) a_i \bar{a}_k = -F_0 (a, \bar{a}),$$

$\gamma_1'' (0) = \lambda_0 (y_1'')_0 - \bar{a} (y'')_0$. Daraus folgt für $\gamma_2 (\vartheta) = \gamma_1^2 (\vartheta)$

$$\gamma_2 (0) = 0 (\frac{1}{r^2}), \gamma_2' (0) = 0 (\frac{1}{r}), \gamma_2'' (0) = 2 F_0^2 (a, \bar{a}) + 0 (\frac{1}{r}) \ldots \qquad (8)$$

Wir erhalten so für unser obiges $g: g^{(j)} (0) = 0$ für $j < m - 2$,

$$g^{(m-2)} (0) \mid (m-2)! = 0 (r^{-2}), g^{(m-1)} (0) \mid (m-1)! = 0 (r^{-1})$$
$$g^{(m)} (0) \mid m! = K F_0^2 (a, \bar{a}) + 0 (r^{-1}) \qquad (9)$$

Nun ist nach Hilfssatz 1 aus I, § 2

$$\int_0^{\pi} e^{i r y_1} g (\vartheta) d\vartheta = \tfrac{1}{2} e^{i r y_1 (e)} \sum_{j=m-2}^{m} A_j e^{-\frac{i (j+1) \pi}{4}} r^{-\frac{j+1}{2}} + ( ) + 0 (r^{-\frac{m}{2}-1}),$$

wo die ( ) die analoge Summe in den B_j ist (analog z. B. zu § 1 (8) dieser Arbeit). Also ist wegen (9)

$$A_{m-2} = 0 (r^{-2}), A_{m-1} = 0 (r^{-1}),$$
$$A_m = \tfrac{1}{2} \Gamma (\frac{m+1}{2}) (\tfrac{1}{2} F_0)^{-\frac{m+1}{2}} K (e) F_0^2 (a, \bar{a}) + 0 (r^{-1}) \qquad (10)$$

Dabei ist wieder $F_0 (a) = \sum_{i,k=2}^{m} H_{ik} (e) a_i a_k$. Analoge Gleichungen gelten für die B_j. Wir benötigen noch, wegen (10),

$$T_4 = \int_{E_{m-1}} F_0^2 (a, \bar{a}) (\tfrac{1}{2} F_0)^{-\frac{m+1}{2}} d\bar{\sigma} \qquad (11)$$

Nun war $F_0 (a, \bar{a}) = \sum_{i,k=2}^{m} H_{ik} (e) \bar{a}_k a_i$, also folgt aus § 1 (4)

$$T_4 = \frac{c}{\Gamma (\frac{m+1}{2}) K^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,k,r,s} H_{ir} H_{ks} A_{rs} \bar{a}_i \bar{a}_k$$

In dieser Summe sind nur jene Summanden $\neq 0$ für die $r = k$ und dann ist $\sum_s H_{k\,s}\, A_{ks} = K$ (da A_{ik} *Adj*. von H_{ik} in Det. $H_{ik} = K$), also

$$T_4 = \frac{c}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} F_0(\bar{a})\, K^{-\frac{1}{2}}(e) \tag{12}$$

Damit erhalten wir

$$T_1 = \frac{c\sqrt{K}\, F_0(\bar{a})}{r^{\frac{m+1}{2}}} \left(\cos\left(r H - \frac{(m+3)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right) \tag{13}$$

Jetzt ist T_2 zu betrachten. Hier ist $g = K \gamma_1 \sin^{m-2}\vartheta \cos\vartheta$, also $g^{(m-1)}(0) \mid (m-1)! = 0(r^{-1})$. Daraus folgt, analog wie bei T_1, $T_2 = 0(r^{-\frac{m}{2}-1})$ und noch einfacher $T_3 = 0(r^{-\frac{m}{2}-1})$.

Daraus folgt, daß in der erstrebten Näherung nur (13) etwas zu $\mathfrak{J}$ beiträgt:

$$\mathfrak{J} = -\frac{c\sqrt{K}\, F_0(\bar{a})}{r^{\frac{m+3}{2}}} \left(\cos\left(r H - \frac{(m-1)\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right) \tag{14}$$

Daraus folgt für $r = r^{(k)}$ aus (3), (14) und § 3 (9′)

$$\mathfrak{J} \mid \mathfrak{J}_1 = -F(\bar{a}) \mid r^{(k)} H(e) + 0(k^{-\frac{1}{2}}) < 0 \text{ für } k < \bar{k}, \text{ da } F_0(\bar{a}) > 0.$$

Berücksichtigt man (4), so erhält man für den Krümmungsradius ϱ in $\vartheta = 0$, da $r'(0) = -\Theta_\vartheta \mid \Theta_r = -r\,\mathfrak{J}_2 \mid \mathfrak{J}_1$

$$\varrho = C(k)\left(1 + \left(\frac{\bar{a}\, y_0}{H}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} F_0^{-1}(\bar{a})\left(1 + 0(k^{-\frac{1}{2}})\right). \tag{15}$$

Jetzt berechnen wir den Krümmungsradius ϱ_0 der Kurve $r = C(k) H^{-1}(u(\vartheta))$ für $\vartheta = 0$ und setzen $h(\vartheta) = H(u(\vartheta))$. Es ist

$$h'(0) = \sum_{i=2}^{m} H_i(e)\,\bar{a}_1 = \bar{a}\, y_0,\ h''(0) = -H_1(e) + \sum_{i,k=2}^{m} H_{ik}(e)\,\bar{a}_i\,\bar{a}_k =$$

$$= -H(e) + F_0(\bar{a}),$$

da $H_i(e) = H(e)$. Es ist also

$$r^2 + 2r'^2 - rr' = C^2(k) F_0(a) H^{-3}(e) \text{ und } \varrho_0 = \left(1 + \left(\frac{\bar{a}\, y_0}{H}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} C(k)\, F_0^{-1}(\bar{a}).$$

Wegen (15) ist damit § 3 (13) bewiesen.

§ 5.

Wir wollen für $m = 2$, § 3 (9′) verbessern. Dazu müssen wir die asymptotische Entwicklung von $G(l) = \int e^{i l x}\, dx$ um einen Schritt weiter treiben, als es in § 1 geschah.

Wir setzen $H(\cos\varphi, \sin\varphi) = h(\varphi)$, $l_1 = r\cos\psi$, $l_2 = r\sin\psi$. Dann erhalten wir in der Bezeichnungsweise von § 1 für A_2 nach (9), da $F_0 = K = h + h''$, $g = K\cos\vartheta$

$$A_2 = -\frac{\sqrt{\pi K}}{8\sqrt{2}\,K^3}\,(3K^2 + \frac{4}{3}K'^2 - K''K) \tag{1}$$

und

$$G = \sqrt{\frac{2\pi K}{\sqrt{r}}}\,[\cos(r h(\psi) - \frac{3\pi}{4}) - \frac{3\Delta(\psi)}{8hr}\sin(r h(\psi) - \frac{3\pi}{4}) + 0(r^{-\frac{3}{2}})], \tag{2}$$

wo

$$\Delta(\psi) = h K^{-3}(K^2 + {}^4/_9 K'^2 - {}^1/_3 K'' K). \tag{3}$$

Daraus folgt für die L_k für $k > \bar{k}$, analog zu § 3 (9′),

$$\left.\begin{aligned} r^{(k)} h(\psi) &= C(k) + {}^3/_8\,\Delta(\psi)\,C^{-1}(k) + 0(k^{-\frac{3}{2}}) \\ C(k) &= \frac{3\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Aus (4) folgt: Sollen unendlichviele L_k von der Gestalt $r^{(k)} h = \bar{C}_k$ sein, wie dies bei der Ellipse der Fall ist, so muß nach (4)

$$\lim_{k\to\infty}[(r^{(k)} h(\psi) - C(k))\,C(k)] = {}^3/_8\,\Delta(\psi) = \text{Const.}$$

sein. Es folgt also aus

$$L_k : r^{(k)} h(\psi) = C \text{ für unendlichviele } k \tag{5}$$

notwendiger Weise

$$\Delta(\psi) = \text{Const.} \tag{6}$$

Ist z. B. der Rand von B: $h(\varphi) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\cos 2\varphi$, $0 < \frac{3}{14}\,a < b < \frac{a}{2}$

so ist $K > 0$, also konvex, o Mittelpunkt, aber $\Delta(0) < 0$, $\Delta(\frac{\pi}{2}) > 0$, usw. Also können bei dieser Kurve die L_k sicher nicht die Gestalt (5) haben.

Wir behaupten nun sogar

Satz 5: Ist B ein ebener konvexer Bereich, der o im Innern enthält, welcher die üblichen Voraussetzungen erfüllt, so besitzt das Integral $G(l) = \int_B e^{i l x} d x$ dann und nur dann unendlichviele Kurven $H(l) = r h(\psi) = \text{Const.}$, wo $l_1 = r \cos \psi$, $l_2 = r \sin \psi$, auf welchen $G(l)$ verschwindet, wenn B eine Ellipse ist.

Beweis: Ist B eine Ellipse, so ist der Satz richtig, da sich $G(l)$ durch $J_1(H(l))$ ausdrücken läßt (J_1 erste Besselfunktion). Es ist, da aus (5) Formel (6) folgt, wenn B einen Mittelpunkt besitzt, noch zu zeigen, daß aus (6) folgt, daß B eine Ellipse ist.

Die Randpunkte von B bezeichnen wir mit $x = (x_1, x_2)$ mit

$$x_1 = h \cos \varphi - h' \sin \varphi, \; x_2 = h \sin \varphi + h' \cos \varphi. \tag{7}$$

Dann gilt für das vektorielle Produkt $(x', x'') = K > 0$ ($K = h + h''$), also ist die affine Bogenlänge $s(\varphi) = \int_0^{\varphi} (x', x'')^{\frac{1}{3}} d c$ monoton wachsend. Die Ableitungen nach s, wenn jetzt s als Kurvenparameter eingeführt wird, werden durch Punkte angedeutet, dann ist nach (7) $h K = (x, x')$, also

$$h K^{\frac{1}{3}} = (x, \dot{x}). \tag{8}$$

Weiter gilt nach *Blaschke*, Affine Differentialgeometrie für die affine Krümmung $\varkappa$:

$$\varkappa = (x'', x''') K^{-\frac{10}{3}} - \tfrac{1}{2} (K^{-\frac{4}{3}})'' = (K^2 + \tfrac{4}{9} K'^2 - \tfrac{1}{3} K K'') K^{-\frac{10}{3}}, \tag{9}$$

also folgt aus (3), (8), (9) und (6)

$$\Delta(\psi) = (x, \dot{x}) \varkappa = C. \tag{10}$$

Dabei ist, wegen der Definition von s, $(\dot{x}, \ddot{x}) = 1$.

Ist $C = 0$, so muß da nach (8) $(x, \dot{x}) \neq 0$, $\varkappa = 0$. Dies ist aber nur für die Parabel der Fall. Also $C \neq 0$ und damit $\varkappa \neq 0$. Aus $(x, \dot{x}) = C \varkappa^{-1}$ folgt nun $(\varkappa^{-1})^{\cdot\cdot} = \dfrac{1 - C}{C}$, wenn man beachtet: $(x, \dot{x})^{\cdot\cdot} = (\dot{x}, \ddot{x}) + (x, \dddot{x}) = 1 - C$, da $\varkappa = (\ddot{x}, \dddot{x})$, also $(x, \dddot{x}) = -x(x, \dot{x}) = -C$. Damit erhalten wir

$$\varkappa^{-1}(s) = \frac{1 - C}{C} s^2 + c_1 s + c_2. \tag{11}$$

Nach (9) ist $\varkappa^{-1}(s)$ in φ periodisch, die rechte Seite von (11) aber nur dann in φ, wenn $C = 1$, $c_1 = 0$, also $\varkappa(s)$ konstant $\neq 0$. Dann ist der

Rand von B eine Ellipse, denn die Hyperbel kommt hier nicht in Betracht. Damit ist für B mit Mittelpunkt der Satz bewiesen. Es wird im nächsten Paragraph gezeigt, daß für Bereiche ohne Mittelpunkt überhaupt nicht unendlichviele geschlossene Kurven existieren, auf welchen G verschwindet. Damit ist dann alles gezeigt.

§ 6.

Es sollen nun die „Extremflächen" von $G(l)$ (definiert in § 3 (1)) studiert werden. Es braucht jetzt B keinen Mittelpunkt besitzen. Wir setzen wieder $l = r\,u$, $|\,u\,| = 1$ und betrachten bei festem u die Extreme von

$$|\,F^2(r)\,| = |\int\limits_B e^{i r u y}\,d\,y\,|^2. \tag{1}$$

Dann muß die Ableitung nach r Null sein, d. h.

$$\text{Real}\,(i \int u\,y\,e^{i r u y}\,d\,y \int e^{-i r u y}\,d\,y) = 0. \tag{2}$$

Für genügend großes r_0 hat für $r > r_0$ die linke Seite von (2) die asymptotische Entwicklung (nach § 1, Satz 1, I, § 3 (5), (6) unter Berücksichtigung der Verschärfung nach § 4 (3)), abgesehen von r^{-m-1},

$$2\,\overline{H}(u)\cos\left(2\,r\,\overline{H}(u) - \frac{\pi\,m}{2}\right) + 0\,(r^{-1}), \tag{3}$$

wo $\overline{H}(u) = \frac{1}{2}(H(u) + H(-u))$. Weiters gilt ebenso für die zweite Ableitung von $|\,F\,|^2$

$$R\,[-\int (u\,y)^2 e^{i r u y}\,d\,y \int e^{-i r u y}\,d\,y + |\int u\,y\,e^{i r u y}\,d\,y\,|^2] =$$

$$= -\,4\,\overline{H}^2(u)\cos\left(2\,r\,\overline{H}(u) - \frac{(m+1)\,\pi}{2}\right) + 0\,(r^{-1}).$$

Dies zeigt man unter Benützung von I, § 2, Hilfssatz 1 (vgl. die Berechnung dieser Integrale für Körper mit Mittelpunkt in § 4).

Dann lehrt eine ähnliche Diskussion wie in § 3:

In den Intervallen $\bar{i}_k = [\bar{r}_-^{(k)}, \bar{r}_+^{(k)}]$, wo $\bar{r}_\pm^{(k)}\,\overline{H}(u) = \dfrac{\pi\,(m-1)}{4} +$

$+ (k+1)\dfrac{\pi}{2} \pm \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}\right.$, sonst beliebig) für $k > k_0(\varepsilon)$ liegt stets eine einfache Nullstelle $\bar{r}^{(k)}$ von $|\,F^2\,|'$ und sonst nirgends. Weiter ist $\operatorname{sgn}|\,F^2(r)\,|'' = (-1)^{k+1}$, also für $k \equiv 1\ (2)$ ist $\bar{r}^{(k)}$ Minimumsstelle von $|\,F^2(r)\,|$, für $k \equiv 0\ (2)$ Maximumsstelle. Führen wir dies für jedes u durch, so erhalten wir die „Minimumsflächen" $\bar{L}_k$:

$$r\,\overline{H}\,(u) = \frac{\pi\,(m+1)}{4} + (2\,k+1)\,\frac{\pi}{2} + 0\,(k^{-1}) \tag{4}$$

und die „Maximumsflächen" $\overline{\overline{L}}_k$:

$$r\,\overline{H}\,(u) = \frac{\pi\,(m+1)}{4} + k\,\pi + 0\,(k^{-1}), \tag{5}$$

welche symmetrisch zu 0 sind. Besitzt B einen Mittelpunkt in 0, dann sieht man aus § 3, daß die „Nullflächen" L_k gerade $\overline{L}_k$ sind.

Ist B beliebig, so wollen wir nun feststellen, wann auf einen Halbstrahl u unendlichviele Nullstellen von $G\,(l)$ liegen.

Nach § 1, Satz 1 muß dann für $r > r_0$

$$F(r) = r^{-\frac{m+1}{2}}\left[\sqrt{K(u)}\,e^{i\,(r\,H\,(u)-\frac{(m+1)\,\pi}{4})} + \sqrt{K(-u)}\,e^{-i\,(r\,H(\,-u)-\frac{(m+1)\,\pi}{4}} + 0\,(r^{-1})\right] = 0$$

unendlichviele Lösungen haben, also

$$\sqrt{K(u)}\,\cos\,(rH(u) - \frac{(m+1)\,\pi}{2}) = -\sqrt{K(-u)}\,\cos\,(rH(-u) - \frac{(m+1)\,\pi}{4}) + 0\,(r^{-1}).$$

Eine analoge Gleichung muß in sin gelten. Daraus folgt durch quadrieren und addieren: $K\,(u) = K\,(-u) + 0\,(\frac{1}{r})$, also

$$K\,(u) = K\,(-u). \tag{6}$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend, denn man prüft sofort nach, daß dann in den Intervallen $\hat{i}_k = (\hat{r}_-^{(k)}, \hat{r}_+^{(k)})$, wo $\hat{r}_\pm^{(k)}\,\overline{H}\,(u) = \frac{\pi\,(m+1)}{4} + (2\,k+1)\,\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$ einfache Nullstellen sind, die auf den L_k liegen. Aus (4) folgt, daß dies für $k > k_0$ alle Nullstellen auf u sind. Sollen nun auf jedem Halbstrahl u unendlichviele Nullstellen liegen, so muß (6) für jedes u erfüllt sein. Dann besitzt aber nach *Bonnesen-Fenchel*, S. 125, B einen Mittelpunkt, und zwar in 0. Es gibt also nur unendlichviele „Nullflächen" L_k, wenn B einen Mittelpunkt besitzt.

Besitzt für $m = 2$ B einen Mittelpunkt und geht man wie in § 5 vor, so erhält man (Δ wie in § 5 definiert) für die $\overline{L}_k$

$$\left.\begin{aligned} r^{(k)}\, h(\psi) &= \overline{C}(k) + {}^1/_8\, \overline{C}^{-1}(k)\,(3\,\Delta + 4) + 0\,(k^{-\frac{3}{2}}) \\ \overline{C}(k) &= \tfrac{3\pi}{4} + k\,\pi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aus Bonnesen-Fenchel S. 115 (3) folgert man, daß es mindestens ein u gibt, so daß (6) gilt. Für $m = 2$ gibt es nach *Blaschke* (vgl. B. F. S. 145 Z. 23 v. o.) sogar mindestens drei solcher Richtungen.

Berichtigung zu Teil I.

Seite 3, Z. 4 ist der Integrand $e^{i\,l\,x}$ zu ersetzen durch $e^{i\,T\,l\,x}$, ebenso in Z. 6 im dritten Integral.

Seite 4, Z. 5 v. u. ist $a - \varepsilon$ durch $a + \varepsilon$ zu ersetzen.

Seite 7, Z. 6, v. u. ist in (14′) $g^{(j)}(a)$ zu streichen.

Seite 26, Z. 4, v. o. lautet richtig

$$\Delta\, L = \sum_{\gamma=0}^{\delta} (-1)^{\delta-\gamma} \binom{\delta}{\gamma} L\,(u + \gamma\,\tau, y).$$

Seite 30, Z. 4, v. u. ist $1 < \alpha < 2$ zu ersetzen durch $1 < \alpha \leqq 2$.

Seite 31, Z. 11 ist $\sum_{j=\gamma}^{\infty} M_j^*$ zu ersetzen durch $\prod_{j=\gamma}^{\infty} M_j^*$.

Seite 31, Z. 12 lautet richtig: $M_\gamma =$ Menge $\{\,|\, R_0(y, u_\gamma)\,| \geqq \lambda_\gamma\, \sigma_\beta^{(\gamma)}\}$

Über die Zetafunktion konvexer Körper*.

Von
Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 21. September 1949.)

Einleitung.

Es sei B ein konvexer Körper $f(x) \leqq 1$ (f sei seine Eich- und H seine Stützfunktion) im R_m ($m \geqq 2$), der den Koordinatenursprung 0 im Innern enthält, dessen Rand $S(B)$ analytisch ist und dessen Tangentialebenen Berührungen von genau erster Ordnung besitzen.

Es sei weiter A eine Matrix mit Determinante 1, $F(x) = f(A\,x)$, dann betrachten wir die Funktion

$$Z(s) = \sum_g{}' \frac{1}{F^{2s}(g)},$$

wo sich die Summation über alle Gitterpunkte $g \neq 0$ erstreckt. Auf diese Funktion wurde, im Fall $m = 2$, von *Minkowski*[1] hingewiesen und von *Herglotz*[2] sogar für allgemeinere Bereiche untersucht. Sie ist als Spezialfall in den Zetafunktionen von *Mordell*[3] enthalten, umfaßt aber, wenn B eine Kugel ist, die *Epstein*sche Zetafunktion.

Wir werden zeigen: $Z(s)$ ist analytisch in der ganzen s-Ebene, ausgenommen die Stelle $s = \frac{m}{2}$, wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum $\frac{m}{2}\mathfrak{J}$ besitzt ($\mathfrak{J}$-Volumen von B) und verschwindet an den Stellen $-1, -2, \ldots$. Es existiert auch ein Analogon zur Funktionalgleichung der *Epstein*schen Zetafunktion.

---

* Herrn Geheimrat *O. Perron* zum 70. Geburtstag.

[1] Jahresbericht D. M. V. 14 (1905), S. 158.

[2] Math. Annalen 56.

[3] Quarterly Journal 1.

Weiters wird ein Gegenstück zu einem berühmten Lemma von *Hardy-Littlewood* aufgestellt (Satz 2), welches für $m = 2$, B-Kreis bereits von *Potter*[4] aufgestellt wurde. Seine Entwicklungen dienten als Vorbild für diese Arbeit. Bei der Herleitung der obigen Ergebnisse benützen wir Sätze aus den Arbeiten „Integrale auf konvexen Körpern I, II" (kurz mit I, II zitiert) (diese Zeitschrift, Bd. 53).

§ 1.

Zuerst soll folgender Satz bewiesen werden:

Satz 1: $Z(s) = \sum_g' \Phi^{-s}$, wo $\Phi = F^2(g)$, ist in der ganzen $s = \sigma + it$-Ebene analytisch, $s = \frac{m}{2}$ ausgenommen, wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum $\frac{m}{2}\Im$ ($\Im$ das Volumen des Eichkörpers $f \leqq 1$) besitzt. Sie verschwindet an den Stellen $s = -1, -2, \ldots$.

Beweis: Es werde $\Phi(g)$ der Größe nach geordnet:

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \lambda_{n+1} \leqq \ldots$$

Es sei weiter

$$B_\delta(u) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \sum_{\Phi(g) \leqq u} (u - \Phi(g))^\delta \quad (\delta \geqq 0) \tag{1}$$

Insbesondere ist $B_0(u) = \sum_{\Phi \leqq u} 1$. Dann ist $B_0(v) = n$, wenn $\lambda_n \leqq v < \lambda_{n+1}$. Wir setzen kurz $B_0 = B$ und $B(x) = N$, wenn $x > 0$ reell.

Es sei zunächst $R(s) = \sigma > \frac{m}{2}$ vorangesetzt. Dann ist $Z(s)$ sicher analytisch. Andererseits ist

$$s \int_x^\infty v^{-s-1} B(v)\,dv = s \int_x^{\lambda_{N+1}} v^{-s-1} B(v)\,dv + s \sum_{j=N+1}^{\infty} \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} v^{-s-1} B(v)\,dv =$$

$$= N(x^{-s} - \lambda_{N+1}^{-s}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} j(\lambda_j^{-s} - \lambda_{j+1}^{-s}) = B(x)\,x^{-s} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \tag{2}$$

Daraus folgt, wenn $R_0(v) = B_0(v) - \Im v^{\frac{m}{2}}$ gesetzt wird,

$$s \int_x^\infty v^{-s-1} R_0(v)\,dv = B_0(x)\,x^{-s} + s\Im\left(\tfrac{m}{2} - s\right) x^{-s+\frac{m}{2}} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

[4] Proceedings London 36.

oder

$$s \int_x^\infty v^{-s-1} R_0(v)\, dv = \frac{m}{m-2s} \Im x^{\frac{m}{2}-s} + R_0(x) x^{-s} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-s} \tag{3}$$

Nun folgt aus (3) durch partielle Integration, wenn

$$R_\delta(v) = B_\delta(v) - \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\delta+\frac{m}{2}+1)} \Im v^{\frac{m}{2}+\delta}$$ gesetzt wird unter Beachtung von I, § 7 (7′)

$$s \int_x^\infty v^{-s-1} R_0(v)\, dv = -s x^{-s-1} R_1(v) + s(s+1) \int_x^\infty v^{-s-2} R_1(v)\, dv$$

und bei wiederholter partieller Integration wird das Integral links in (3) für irgend ein ganzes $k \geqq 0$

$$-x^{-s} \sum_{j=0}^{k} (s)_j x^{-j-1} R_{j+1}(x) + (s)_{k+1} \int_x^\infty v^{-s-k-2} R_{k+1}(v)\, dv,$$

wo $(s)_j = s(s+1)\ldots(s+j)$.

Nun ist $\sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-s} = Z(s) - \sum_{\Phi \leqq x} \Phi^{-s}$, also erhalten wir, wenn wir statt k, $\delta - 1$ schreiben.

$$Z(s) - \sum_{\Phi \leqq x}{}' \Phi^{-s} + R_0(x) x^{-s} + \frac{m}{m-2s} \Im x^{\frac{m}{2}-s} + x^{-s} \sum_{j=0}^{\delta-1} (s)_j x^{-j-1} R_{j+1}(x) =$$

$$= (s)_\delta \int_x^\infty v^{-s-\delta-1} R_\delta(v)\, dv. \tag{4}$$

Es sei nun $\delta > \frac{m-1}{2}$. Dann ist nach I, § 7 (8) mit $h = y = 0$

$$R_\delta(v) = \Sigma' L_\delta,$$

wo $L_\delta = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_{f \leqq \sqrt{v}} (v - f^2)^\delta e^{2\pi i k z}\, dz$ $k = A^{*-1} g$, A^* Transponierte zu A und nach II, Satz 2 $0\,(v^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}} |k|^{-\frac{m+1}{2}-\delta})$. Daraus folgt zunächst $\int_x^\infty v^{-s-\delta-1} R_\delta\, dv = \Sigma' \int_x^\infty v^{-s-\delta-1} L_\delta\, dv$. Weiter ist $v^{-s-\delta-1} L_\delta = 0\,(v^{\frac{m-1}{4}-\sigma-\frac{\delta}{2}-1} |k|^{-\frac{m+1}{2}-\delta})$. Ist also $\sigma > -\frac{1}{2}(\delta - \frac{m-1}{2})$, so sind die Integrale konvergent, stellen analytische Funktionen dar und die Reihe ist gleichmäßig konvergent. Damit ist

wegen (4) $Z(s)$ in die Ebene rechts von $\sigma = -\frac{1}{2}(\delta - \frac{m-1}{2})$ analytisch fortgesetzt. Da δ eine beliebige ganze Zahl $> \frac{m-1}{2}$ war, so folgt, daß $Z(s)$ in der ganzen Ebene, ausgenommen $s = \frac{m}{2}$, wo sie einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{m}{2}\Im$ besitzt, analytisch ist.

Wir setzen in $\int_x^\infty v^{-s-\delta-1} L_\delta \, dv$

$$e_k = k\,|\,|\,k\,|, w = 2\pi\,|\,k\,|\sqrt{v}, \xi = 2\pi\,|\,k\,|\sqrt{x}, \Im_\delta(w,k) = \int_{f\leqq 1} (1-f^2)^\delta \, e^{iw(e_k z)}\, dz, \tag{5}$$

dann nimmt dieses Integral die Gestalt

$$\frac{2}{\Gamma(\delta+1)}(4\pi^2\,|\,k\,|^2)^{s-\frac{m}{2}} \int_\xi^\infty w^{-2s+m-1}\Im_\delta(w,k)\,dw$$

an und aus (4) wird

$$Z(s) - \sum_{\Phi\leqq x}{}' \Phi^{-s} + R_0(x)x^{-s} + \frac{m}{m-2s}\Im x^{\frac{m}{2}-s} + x^{-s}\sum_{j=0}^{\delta-1}\Sigma(s)_j x^{-j-1}R_{j+1}(x)$$

$$= \frac{2(s)_\delta}{\Gamma(\delta+1)}\,\Sigma'\,(4\pi^2\,|\,k\,|^2)^{s-\frac{m}{2}} \int_\xi^\infty w^{-2s+m-1}\Im_\delta\,(w,k)\,dw \tag{6}$$

gültig für $\sigma > -\eta = -\frac{1}{2}(\delta - \frac{m-1}{2})$, $\delta > \frac{m-1}{2}$ ganz.

Es sei nun in (6) $\sigma < 0$, dann können wir mit $x \longrightarrow 0$ gehen, da $\Im_\delta$ für $w \longrightarrow 0$ beschränkt und es kommt

$$Z(s) = \frac{2(s)_\delta}{\Gamma(\delta+1)}\,\Sigma'\,(4\pi^2\,|\,k\,|^2)^{s-\frac{m}{2}} \int_0^\infty w^{-2s+m-1}\Im_\delta\,(w,k)\,dw \tag{7}$$

für $0 > \sigma > -\eta$. Daraus folgt, daß $Z(s)$ aus den Stellen $-1, -2, \ldots$ verschwindet. Ist $F^2(g)$ eine quadratische Form, so geht (7) in die Funktionalgleichung der *Epstein*schen Zetafunktion über. Wir können noch (7) umformen. Es sei

$$v(k,\varepsilon,s) = \int_{R_m} f^{-2s}\, e^{i(e_k x) - \varepsilon f(x)}\, dx$$

für $\varepsilon > 0$, welches existiert für $R(s) < \frac{m}{2}$. Wir werden in § 3 zeigen, daß $\lim_{\varepsilon \to 0} v(k, \varepsilon, s)$ existiert, für $\sigma > -\eta$ eine analytische Funktion ist ($\eta = \frac{1}{2}(\frac{m-1}{2} - \delta)$, $\delta > \frac{m-1}{2}$, ganz, sonst beliebig), und zwar gleich ist $2(s)_\delta \int_0^\infty w^{-2s+m-1} \Im_\delta \, dw$.

Damit wird (7)

$$\left.\begin{aligned} Z(s) &= \Sigma' (4\pi^2 \mid k \mid^2)^{s-\frac{m}{2}} V(k, s) \\ V(k, s) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R_m} f^{-2s} e^{i(e_k x) - \varepsilon f(x)} \, dx \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Liegt die Kugel vor, so ist $V(k, s) = 2^{m-2s} \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2} - s)}{\Gamma(s)}$, also liefert (8) $Z(s) = \frac{\pi^{2s-\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2} - s)}{\Gamma(s)} Z(\frac{m}{2} - s)$.

§ 2.

Satz 2: Es sei

$$\left.\begin{aligned} &\sigma \geqq \sigma_0 \geqq -\eta = -\tfrac{1}{2}(\tfrac{m-1}{2} - \delta),\ \delta > \tfrac{m-1}{2} \text{ ganz},\ \mid s - \tfrac{m}{2} \mid \geqq \varepsilon > 0 \\ &x > 0, \qquad \mid t \mid \leqq \tfrac{\pi}{\gamma} \sqrt{\lambda x}, \text{ wo } \gamma > 1,\ \lambda = \operatorname{Min} H^2(k). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dann ist

$$Z(s) = \sum_{\phi \leqq x}' \Phi^{-s} + \frac{m}{m-2s} \Im x^{\frac{m}{2}-s} + 0(x^{-\sigma + \frac{m}{2} - \frac{m}{m+1}}) \tag{10}$$

Beweis: Es ist nach II, Satz 2

$$\Im_\delta(w, k) = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} 2^\delta}{w^{\frac{m+1}{2}+\delta}} \left[\frac{\sqrt{K_+}}{H_+^\delta} e^{i(wH_+ - \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{K_-}}{H_-^\delta} e^{-i(wH_- + \frac{\pi}{2}(\delta + \frac{m+1}{2}))} + 0(w^{-1}) \right].$$

Dabei ist H die Stützfunktion von B, K das Produkt der Hauptkrümmungsradien des Randes von B. $H_\pm$, $K_\pm$ bedeutet, daß sie die Werte sind, welche sie für $\pm e_k$ annehmen. Es wird also

$$\int_{\xi}^{\infty} w^{-2s+m-1}\Im_\delta\, dw = A_k \int_{\xi}^{\infty} w^{-2s-1-2\eta} e^{iwH_+}\, dw +$$

$$+ B_k \int_{\xi}^{\infty} w^{-2s-1-2\eta} e^{-iwH_-}\, dw + 0\left(\int_{\xi}^{\infty} w^{-2(\sigma+1)-2\eta}\, dw\right) \quad (11)$$

wo $A_k = 2^\delta\ (2\pi)^{m-1}\,(K(e_k))^{\frac{1}{2}}\, H_+^{-\delta}\ e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta+\frac{m}{2})}$. B_k ist analog gebaut.

Der dritte Bestandteil rechts in (11) ist $0\,((|k|^2 x)^{-\sigma-\frac{1}{2}-\eta})$, da $\xi = 2\pi\,|k|\sqrt{x}$. Nun betrachten wir das erste Integral

$$I_1 = \int_{\xi}^{\infty} w^{-2(s+\eta)-1} e^{iwH_+}\, dw = \int_{\xi}^{\infty} w^{-2(\sigma+\eta)-1} e^{iu}\, dw,$$

wo $u = wH_+ - 2t\ln w$. Dann ist

$$\frac{du}{dw} = H_+ - \frac{2t}{w} \geqq H_+ - 2|t|\xi^{-1} \geqq H_+\left(1 - \frac{|t|}{\pi\sqrt{x\lambda}}\right) \geqq H_+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) > 0,$$

daher

$$I_1 = \frac{1}{H_+}\int_{w=\xi}^{\infty} w^{-2(\sigma+\eta)-1}\left(1-\frac{2t}{wH_+}\right)^{-1} e^{iu}\, du.$$

Hier nimmt der reelle Faktor monoton ab, wenn w zunimmt, da $\sigma > -\eta$, also nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung, angewendet auf Real- und Imaginärteil

$$I_1 = 0\,(\xi^{-2(\sigma+\eta)-1}) = 0\,((x\,|\,k\,|^2)^{-\sigma-\eta-\frac{1}{2}}).$$

Dasselbe zeigt man für das zweite Integral in (11). Also erhalten wir aus (6)

$$Z(s) - \sum_{\Phi \leqq x}{}' \Phi^{-s} + R_0(x)\, x^{-s} + \frac{m}{m-2s}\,\Im\, x^{\frac{m}{2}-s} + x^{-s}\sum_{j=0}^{\delta-1}\Sigma(s)_j\, x^{-j-1} R_{j+1} =$$

$$= 0\left(|t|^{\delta+1}\, x^{-\sigma-\eta-1}\, \Sigma\,(4\pi^2\,|\,k\,|^2)^{-\frac{m}{2}-\eta-1}\right). \quad (12)$$

Nun ist $\frac{m}{2} + \eta + \frac{1}{2} > \frac{m+1}{2}$ und $|t| = 0\,(x^{\frac{1}{2}})$, also wird das 0-Glied in (12) $0\,(x^{-\sigma+\frac{m-1}{2}})$.

Es ist weiter nach I, § 8 (9) mit $y = 0$ $R_0 = 0\,(x^{\frac{m}{2}-\frac{m}{m+1}})$, und nach I, § 8 (13) für $\delta > \frac{m-1}{2}$ $R_\delta = 0\,(x^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}})$.

Nehmen wir z. B. $\delta_0 = [\frac{m+1}{2}]$, dann folgt nach dem Satz von *M. Riesz* (Acta Szeged 1) für $0 < \delta < \delta_0$

$$R_\delta = 0\,((x^{\frac{m}{2}} - \frac{m}{m+1})^{1-\frac{\delta}{\delta_0}}\,(x^{\frac{m-1}{4}} + \frac{\delta_0}{2})\,\frac{\delta}{\delta_0}).$$

Weiter ist $(s)_j = 0\,(|t|^{j+1}) = 0\,(x^{\frac{j+1}{2}})$, also wird $x^{-s-j-1}\,(s)_j\,R_{j+1} = 0\,(x^{-\sigma+\frac{m}{2}-\frac{m+1}{2}})$. Setzen wir dies in (12) alles ein, so erhalten wir (10).

§ 3.

Es sind noch die Behauptungen von § 1 über

$$v\,(k, \varepsilon, s) = \int\limits_{Rm} f^{-2s}\,e^{i\,(e_k\,x) - \varepsilon f(x)}\,d\,x$$

nachzutragen. Da $R\,(s) < \frac{m}{2}$ vorausgesetzt wurde, so existiert v. Es ist, da der Integrand für $x \longrightarrow \infty$ gegen 0 strebt, nach I, § 1

$$v = -\int\limits_0^\infty u^m \frac{d}{du}\,(e^{-\varepsilon u}\,u^{-2s})\,du \int\limits_{t \leqq 1} e^{i u e_k y}\,dx.$$

Wir setzen $g = \frac{d}{du}\,(e^{-\varepsilon u}\,u^{-2s})$, dann $u = \sqrt{w}$, $g\,(\sqrt{w})\,w^{-\frac{1}{2}} = h(w)$, dann kommt

$$v = -\tfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty h\,(w)\,L_0\,dw.$$

Partielle Integration liefert

$$-2\,v = -\int\limits_0^\infty h'\,(w)\,L_1\,dw, \text{ da } \lim_{w \to \infty} h\,(w) = 0,\ L_0\,(0) = 0.$$

Wiederholte Integration liefert

$$-2\,v = (-1)^\delta \int\limits_0^\infty h^{(\delta)}\,(w)\,L_\delta\,dw.$$

Nun ist

$$h^{(\delta)}\,(w) = (-1)^{\delta-1} \sum_{i=0}^{\delta+1} c_i\,\varepsilon^i\,w^{-\frac{2\,(s+\delta+1)-i}{2}}\,e^{-\varepsilon\sqrt{w}}$$

mit $c_0 = 2\,\frac{\Gamma\,(s+\delta+1)}{\Gamma\,(s)}$, wie man mittels vollständiger Induktion zeigt.

Wir erhalten also

$$v = \tfrac{1}{2} \sum_{i=0}^{\delta+1} c_i \varepsilon^i \int_0^\infty e^{-\varepsilon\sqrt{w}}\, w^{-(s+\delta+1-\frac{i}{2})}\, L_\delta(w)\, dw.$$

Nun ist nach II, Satz 2 $L_\delta(w) = 0\,(w^{\frac{m-1}{4}+\frac{\delta}{2}})$ für $w \to \infty$, also ist, wenn $\sigma > -\tfrac{1}{2}(\delta - \frac{m-1}{2}), \delta > \frac{m-1}{2}$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty w^{-s-\delta-1} e^{-\varepsilon\sqrt{w}}\, L_\delta(w)\, dw$ vorhanden und gleich $\int_0^\infty w^{-s-\delta-1} L_\delta(w)\, dw$. Weiter ist für $i > 0$ $\varepsilon^i \int_0^\infty e^{-\varepsilon\sqrt{w}}\, w^{-s-\delta-1+\frac{i}{2}} L_\delta(w)\, dw = 0\,(\varepsilon^{2s+\delta-\frac{m-1}{2}})$, also gehen diese Ausdrücke mit $\varepsilon \to 0$ gegen 0. Es existiert also für jedes s mit $-\tfrac{1}{2}(\delta - \frac{m-1}{2}) < \sigma < \frac{m}{2}, \delta > \frac{m-1}{2}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v \text{ und ist } \frac{\Gamma(s+\delta+1)}{\Gamma(s)} \int_0^\infty w^{-s-\delta-1} L_\delta(w)\, dw.$$

Dies wurde gerade in § 1 behauptet.

Über eine infinitesimale kinematische Abbildung.

Von
Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 24. September 1949.)

Study's Übertragungsprinzip der Liniengeometrie besteht in der eineindeutigen Abbildung der gerichteten Geraden des dreidimensionalen Euklidischen Raumes auf die dualen Punkte der Einheitskugel: Einem Strahl $\mathfrak{A}$, der durch das Vektorenpaar $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$, nämlich durch den die Richtung der Geraden bestimmenden Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ und den Vektor $\bar{\mathfrak{a}}$ des vektoriellen Momentes in Bezug auf den Ursprung des Koordinatensystems festgelegt ist, kann nach *Blaschke* der duale Einheitsvektor $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}$ zugeordnet werden, wobei die Einheit ε der Rechenregel $\varepsilon^2 = 0$ genügt. Die Komponenten der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ sind inhomogene *Plücker*sche Linienkoordinaten der Geraden $\mathfrak{A}$, die durch die Bedingung $\mathfrak{A}^2 = 1$ oder $\mathfrak{a}^2 = 1$, $\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = 0$ normiert sind.[1]

Ausgehend von der formalen Übereinstimmung und der Tatsache, daß man mit dualen Zahlen $x + \varepsilon\,y$ so, wie mit Potenzreihen in ε rechnen kann, die man nach den in ε linearen Gliedern abbricht, können wir nun folgende Abbildung der Geraden des Euklidischen Raumes erklären: *Man ordnet dem Strahl* $\mathfrak{A}$ *das infinitesimal benachbarte Punktepaar der Einheitskugel zu, das von den Endpunkten der Vektoren* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}$ *gebildet wird*, wobei die skalare Größe ε als eine reelle (gegenüber $|\,\bar{\mathfrak{a}}\,|$), kleine Konstante betrachtet wird, deren höhere als erste Potenzen zu vernachlässigen sind.[2] Statt von einer Abbildung auf ein solches Punktepaar können wir auch von einer Abbildung auf einen infinitesimalen Vektor sprechen, der auf der Einheitskugel liegt.

Für eine Gerade durch den Ursprung fallen wegen des Verschwindens des Momentvektors beider Bilder zusammen; *das Strahlbündel durch den Ursprung ist somit das Koinzidenzgebilde unserer Abbildung.*

---

[1] Vgl. *E. Study*, Geometrie der Dynamen. (Leipzig 1903), sowie *W. Blaschke*, Vorl. ü. Differentialgeometrie I (3. Aufl., Berlin 1930), 9. Kap.

[2] Ein ähnliches Vorgehen findet auch bei der Betrachtung der infinitesimalen Deformationen von Flächen statt.

Soweit nun die Gebilde des Strahlraumes rein liniengeometrischen Methoden zugänglich sind, erweist sich diese Abbildung der Geraden auf „benachbarte Punktepaare", wie wir kurz sagen wollen, und das damit verbundene Übertragungsprinzip von Vorteil, spiegeln sich doch viele Eigenschaften, insbesondere metrischer und differentieller Natur in einfachen und anschaulichen geometrischen Merkmalen der entsprechenden infinitesimal benachbarten Gebilde der Einheitskugel: Die Liniengeometrie des Euklidischen Raumes ist isomorph der Geometrie der benachbarten Punktepaare auf der Einheitskugel. Wenn wir jeweils den Übergang vom sphärischen Bild $\mathfrak{a}$ einer Geraden zum benachbarten Punkt $\mathfrak{A}$ im Auge haben, ist es vielfach auch zweckmäßig, von einer infinitesimalen Transformation eines Gebildes der Einheitskugel in ein ebensolches zu sprechen. Da die Abbildung eines Punktes, aufgefaßt als Träger eines Strahlbündels, einer infinitesimalen Drehung der Bildkugel entspricht, können wir diese Zuordnung als infinitesimale kinematische Abbildung bezeichnen und zahlreiche Parallelen zu der nach *Blaschke* und *Grünwald* benannten kinematischen Abbildung erkennen, nur daß in unserem Fall der Euklidische Punktraum zum Parameterraum der Gruppe der infinitesimalen Euklidischen Drehungen der Einheitskugel wird.

1.

Den Euklidischen Bewegungen des Linienraumes entsprechen die orthogonalen linearen Transformationen mit dualen Koeffizienten, also die dualen Drehungen der Einheitskugel. Eine solche Transformation, die vorerst keine Schiebung sei, kann in der Form

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}\cos\Theta + (\mathfrak{P}\times\mathfrak{A})\sin\Theta + (\mathfrak{A}\,\mathfrak{P})\,\mathfrak{P}\,(1-\cos\Theta) \qquad (1)$$

geschrieben werden, wobei der duale Einheitsvektor $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} + \varepsilon\bar{\mathfrak{p}}$ die Schraubachse im Linienraum darstellt, während der duale Winkel $\Theta = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}$ durch seinen „Realteil" φ den Drehwinkel um $\mathfrak{P}$ und durch seinen „Dualteil" $\bar{\varphi}$ die Schiebstrecke längs $\mathfrak{P}$ angibt.[3]

In unserer Abbildung auf die reelle Einheitskugel wird das sphärische Bild $\mathfrak{a}$ des Strahles $\mathfrak{A}$ um die Drehachse $\mathfrak{p}$ durch den Winkel φ nach $\mathfrak{a}^*$ und der benachbarte Punkt $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}$ um die zu $\mathfrak{p}$ „benachbarte" Achse $\mathfrak{P}$ durch den infinitesimal abgeänderten Winkel Θ nach

[3] Vgl. etwa Enz. Math. Wiss., III/1, Nr. 11 oder auch *W. Blaschke*, Analytische Geometrie (Wolfenbüttel 1948), S. 63.

$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{a}^* + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}^*$ gedreht. — Beide Drehungen erfolgen um die gleiche Achse $\mathfrak{p}$, falls für reelles $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ die Schraubachse durch den Ursprung geht. — Für $\overline{\vartheta} = 0$ stimmen beide Drehwinkel $\Theta = \vartheta$ überein, was für die Drehungen im Strahlraum charakteristisch ist. Ist außerdem noch $\vartheta = \pi$, so erhalten wir Spiegelungen sowohl im Strahlraum als auch auf der Bildkugel. (Hier natürlich an den Punkten $\mathfrak{p}$, bzw. $\mathfrak{P}$.)

Nun wenden wir (1) für $\vartheta = 0$, also für einen rein dualen Winkel $\Theta = \varepsilon\overline{\vartheta}$ an: Wegen $f(x + \varepsilon y) = f(x) + \varepsilon\, y f'(x)$ finden wir

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \varepsilon\overline{\vartheta}\,(\mathfrak{P} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}} + \varepsilon\overline{\vartheta}\,(\mathfrak{p} \times \mathfrak{a}). \tag{2}$$

Die Schraubung im Strahlraum wird zu einer Schiebung längs der Geraden $\mathfrak{P}$, also in Richtung von $\mathfrak{p}$. Die Schiebstrecke ist hiebei $\overline{\vartheta}$. In unserer Abbildung bleibt das erste sphärische Bild $\mathfrak{a}$ fest, während der Nachbarpunkt $\mathfrak{A}$ um $\mathfrak{p}$ oder jeden hiezu benachbarten Punkt $\mathfrak{P}$ (Unbestimmtheit) durch den infinitesimalen Winkel $\varepsilon\overline{\vartheta}$ nach $\mathfrak{A}^*$ gedreht wird.

Fassen wir nun im Strahlraum die Schiebung der durch den Ursprung gehenden Geraden $\mathfrak{a}$ — der Momentvektor verschwindet für solche Gerade — nach $\mathfrak{A}$ ins Auge, so muß also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} + \varepsilon\overline{\vartheta}\,(\mathfrak{p} \times \mathfrak{a}) \tag{3}$$

sein oder, wenn wir $\overline{\vartheta}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{x}$ setzen, $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{a}$. Dies ist aber die Inzidenzbedingung der Geraden $\mathfrak{A}$ und des durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ festgelegten Punktes. Im Fußpunkt $\underline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}$ des Lotes vom Ursprung auf die Gerade $\mathfrak{A}$ wird der Betrag von $\mathfrak{x}$, also die Schiebstrecke $\overline{\vartheta}$ den kleinsten Wert annehmen. *Ganz allgemein kann daher für das Bildpunktepaar eines beliebigen Strahles $\mathfrak{A}$ der Übergang vom Punkt $\mathfrak{a}$ zum Nachbarpunkt $\mathfrak{A}$ als eine Drehung um $\mathfrak{p}$ durch den infinitesimalen Winkel $\varepsilon\overline{\vartheta}$ angesehen werden, wobei $\mathfrak{x} = \overline{\vartheta}\,\mathfrak{p}$ Ortsvektor eines auf der Geraden liegenden Punktes ist*; für den Lotfußpunkt ergibt sich der kleinste Drehwinkel. Alle Drehzentren $\mathfrak{p}$ liegen auf einem Hauptkreis der Kugel in der durch die Gerade $\mathfrak{A}$ und den Kugelmittelpunkt 0 bestimmten Ebene mit der Gleichung $\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{z} = 0$. (Hiebei ist nur der Punkt $\mathfrak{a}$ selbst als Drehzentrum auszuschließen.)

Im allgemeinen Fall der Schiebung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}^*$ finden wir

$$\bar{\mathfrak{a}}^* = (\mathfrak{x} + \overline{\vartheta}\,\mathfrak{p}) \times \mathfrak{a}$$

wobei $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{a}$ ist. $\mathfrak{x}$ liegt also im Strahlraum auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \overline{\vartheta}\,\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{A}^*$. Der Verbindungsvektor $\overline{\vartheta}\,\mathfrak{p}$ irgend zweier Punkte $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{A}^*$ charakterisiert somit die Drehung auf der Bildkugel. Die

Vektoren $\mathfrak{p}$ liegen in der zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ parallelen Durchmesserebene der Kugel, ihre Endpunkte erfüllen also gleichfalls einen Hauptkreis.

2.

Diese Transformationen der Einheitskugel, die den Euklidischen Bewegungen im Strahlraum entsprechen, lassen die sphärischen Abstände φ und Φ zweier benachbarter Bildpunktepaare $(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{B})$ invariant; hiebei ist

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \cos\varphi, \quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \cos\Phi = \cos\varphi - \varepsilon\,\bar{\varphi}\sin\varphi \tag{4}$$

und bedeutet φ den Winkel und $\bar{\varphi}$ den kürzesten Abstand der Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Strahlraum. — *Isometrische Punktepaare*, d. h. gleiche Entfernungen $\varphi = \Phi$ der Punktepaare sind also für *schneidende* und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für zu einander *senkrechte Gerade charakteristisch*. Bei *parallelen Geraden* ($\varphi = 0$) versagt (4) zur Festlegung des rein dualen Winkels Φ. Die ersten Bildpunkte fallen zusammen ($\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$), für den Abstand der zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ finden wir: $\Phi = \varepsilon\,|\,\underline{\mathfrak{a}} - \underline{\mathfrak{b}}\,| = \varepsilon\,|\,\bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{b}}\,|$. Hiebei bedeuten $\underline{\mathfrak{a}}$ und $\underline{\mathfrak{b}}$ wiederum die Lotfußpunkte. — Hieran anschließend bemerken wir, daß alle Strahlen $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}$ mit $\Phi = \varepsilon\,|\,\bar{\mathfrak{a}}\,| = \varepsilon\,|\,\underline{\mathfrak{a}}\,| =$ konst. einen „*Komplex gleicher Spanne*" *als Bild des Tangentenkomplexes einer Kugel* mit dem Radius $|\,\bar{\mathfrak{a}}\,| = |\,\underline{\mathfrak{a}}\,|$ und dem Mittelpunkt im Ursprung bestimmen.

3.

Zwecks Festlegung eines *eigentlichen Strahlbüschels* mit dem Scheitel $\mathfrak{x}$ kann ohne weiters angenommen werden, daß ein beliebiger Büschelstrahl $\mathfrak{C}$ auf zwei sich senkrecht schneidenden Strahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, für die also $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = 0$, $\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}} + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b} = 0$ gilt, unter Verwendung eines reellen Parameters γ aufgespannt wird:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\cos\gamma + \mathfrak{b}\sin\gamma, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A}\cos\gamma + \mathfrak{B}\sin\gamma.$$

Die Bildpunktepaare der Strahlen eines Strahlbüschels wandern daher auf zwei benachbarten Größtkreisen der Einheitskugel, die isometrisch aufeinander bezogen sind (Kongruente Punktreihen auf benachbarten Größtkreisen!), denn für den Büschelträger $\mathfrak{x} = \dfrac{\bar{\mathfrak{a}} \times \bar{\mathfrak{b}}}{\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{b}}} = \overline{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{p}$, $(\mathfrak{p}^2 = 1)$ gilt die Inzidenzbedingung $\mathfrak{x} \times \mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{c}}$. Es gehen somit die beiden Bildkreise, die von den benachbarten Bildpunktepaaren der Büschelstrahlen

beschrieben werden, durch eine infinitesimale Drehung um die Achse $\mathfrak{p}$ mit dem Drehwinkel $\varepsilon\,\overline{\mathfrak{v}}$ ineinander über. Zu diesem Ergebnis gelangt man auch unmittelbar, wenn man ein Strahlbüschel, dessen Träger der Koordinatenursprung ist, in der Richtung $\mathfrak{p}$ um die Strecke $\overline{\mathfrak{v}}$ verschiebt.

Läßt man in (2) die Schiebstrecke $\overline{\mathfrak{v}}$ als Parameter veriieren, so beschreibt $\mathfrak{A}^*$ ein *Parallelstrahlbüschel*, dessen sphärisches Bild durch kontinuierliche infinitesimale Drehung von $\mathfrak{A}$ um $\mathfrak{p}$ (oder jeden hiezu benachbarten Punkt $\mathfrak{P}$) entsteht, während der erste Bildpunkt $\mathfrak{a}$ fest bleibt. Alle Vektoren $\mathfrak{p}$, die als Drehachse des Bildes fungieren, liegen in der zur Büschelebene parallelen Durchmesserebene der Kugel. Der Ort der zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}^*$ kann in verschiedener Weise aufgefaßt werden: Denken wir an die Drehung um $\mathfrak{p}$, so erfüllt $\mathfrak{A}^*$ ein infinitesimales Stück eines in der Ebene $(\mathfrak{x} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{p} = 0$ liegenden Kreises unserer Bildkugel. Wegen $\mathfrak{A}^* - \mathfrak{A} = \varepsilon\,\overline{\mathfrak{v}}\,(\mathfrak{p} \times \mathfrak{a})$ können wir diesen Ort der zweiten Bildpunkte aber auch als ein auf der Kugel liegendes infinitesimales Stück einer Geraden (infinitesimale Strecke) durch den Punkt $\mathfrak{A}$ mit der Richtung normal zur Büschelebene ansehen. Die Bildpunktepaare der Strahlen eines Parallelstrahlbüschels bestimmen somit auf der Einheitskugel eine einparametrige, fächerförmige Mannigfaltigkeit infinitesimaler Bildvektoren mit dem „Scheitel" in $\mathfrak{a}$.

4.

Nun untersuchen wir die Abbildung der *Regelscharen einer Quadrik*. Wir nehmen vorerst eine nicht ausgeartete Mittelpunktsfläche, also ein einschaliges Hyperboloid in besonderer Lage an:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 = 1$$

sei die Gleichung dieser Fläche in dem zugrunde gelegten Cartesischen Koordinatensystem mit den Grundvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$; weiters gelte $|a_1| > |a_2|$. Wie man leicht bestätigt, werden die beiden Regelscharen dieser Quadrik unter Verwendung eines reellen Parameters φ durch folgenden dualen Einheitsvektor dargestellt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{W}\,[\pm A_1\,\mathfrak{e}_1 \sin\varphi \mp A_2\,\mathfrak{e}_2 \cos\varphi + A_3\,\mathfrak{e}_3]$$

Hiebei ist $A_1 = a_1 \pm \varepsilon\,a_2\,a_3$, $A_2 = a_2 \pm \varepsilon\,a_3\,a_1$, $A_3 = a_3 \mp \varepsilon\,a_1\,a_2$,

$W = \sqrt{a_1^2 \sin^2\varphi + a_2^2 \cos^2\varphi + a_3^2}$ und legt jeweils das obere Vorzeichen den einen, das untere den anderen Regulus unserer Quadrik fest. (Eine Trennung möge später durch verschiedene Akzente angedeutet werden.) Die ersten Bildpunkte

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{W}\left[\pm a_1 e_1 \sin\varphi \mp a_2 e_2 \cos\varphi + a_3 e_3\right]$$

der beiden Regelscharen werden auch vom Richtkegel

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 = 0$$

unserer Fläche auf der Einheitskugel ausgeschnitten, erfüllen also einen sphärischen Kegelschnitt (Schnitt einer Kugel mit einem konzentrischen Kegel zweiten Grades). Projezieren wir die zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}$ aus dem Ursprung 0, so erhalten wir zu jedem der beiden Regulusse wiederum einen Kegel zweiten Grades mit der Gleichung

$$\left(\frac{x_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{A_3}\right)^2 = 0$$

der aus der Einheitskugel den Ort der Punkte $\mathfrak{A}$, also wiederum je einen sphärischen Kegelschnitt ausschneidet. Die Achsen dieser drei Kegel decken sich und fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Wegen

$$A_1^2 - A_2^2 = a_1^2 - a_2^2,\ A_2^2 + A_3^2 = a_2^2 + a_3^2$$

stimmen auch die (reellen) Fokalachsen (Fokallinien) dieser koachsialen Kegel überein; sie sind ja durch

$$x_2 = 0,\ \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_2^2 + a_3^2} = 0$$

festgelegt.[4] — Wählt man unter den vier Schnittpunkten dieser beiden reellen Fokallinien mit der Kugel zwei geeignete Brennpunkte so aus, daß die sphärischen Kegelschnitte etwa als sphärische Ellipsen aufzufassen sind, und legt man durch die ersten Bildpunkte $\mathfrak{a}$ jeweils sphärische Hyperbeln mit den gleichen Brennpunkten, so liegen auf ihnen, wie eine einfache Rechnung zeigt, auch die zu $\mathfrak{a}$ benachbarten Punkte $\mathfrak{A}$. Die entsprechenden Bildpunktepaare der Erzeugenden eines

[4] Vgl. etwa *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes I (5. Aufl., Leipzig-Berlin 1922), S. 394.

Regulus (in der speziellen Lage, daß der Quadrikmittelpunkt im Ursprung liegt) beschreiben daher in der Weise konfokale sphärische Kegelschnitte, daß je zwei entsprechende Punkte auch jeweils durch einen konfokalen Kegelschnitt der anderen Art ausgeschnitten werden.[5] — Zusammen mit der Schnittbedingung für Erzeugende verschiedener Scharen liefert diese Eigenschaft ein Gegenstück zur *Ivory*schen Verwandtschaft der Ebene und dem bekannten Satz über konfokale ebene Kegelschnitte.[6] Sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ irgend zwei Punkte der Kurve $\{\mathfrak{a}\}$ (erste Bildpunkte) und $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$, bzw. $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_2''$ jeweils die beiden benachbarten zweiten Bildpunkte, sind also $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{A}_i')$ und $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{A}_i'')$ die Bildpunktepaare paralleler Erzeugenden der Quadrik, so gilt $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{A}_1'\,\mathfrak{A}_2'' = \mathfrak{A}_1''\,\mathfrak{A}_2'$.

Durch eine geeignete Schraubung, der im sphärischen Bild die in Abschnitt 1 geschilderten Drehungen der Bildpunktepaare entsprechen, kann nun unsere Quadrik aus der speziellen in eine allgemeine Lage gegenüber der Bildkugel und dem Koordinatensystem gebracht werden. Für die Bilder der beiden Regelscharen ergibt sich daher lediglich eine Störung der Konfokalität zwischen der ersten und den beiden zweiten Bildkurven. *Die sphärischen Bilder der beiden Regulusse einer Quadrik bestehen aus einem sphärischen Kegelschnitt und zwei zu ihm infinitesimal benachbarten konfokalen sphärischen Kegelschnitten; die auf der Kugel gemessenen Brennpunktsabstände stimmen überein.*

Für $a_1 = a_2$ ist die Quadrik eine Drehfläche; obige Formeln und Ergebnisse vereinfachen sich in diesem Fall. *Das sphärische Bild eines Regulus, der auf einem Drehhyperboloid liegt, besteht aus zwei infinitesimal benachbarten Kreisen der Einheitskugel.* Fällt im besonderen der Quadrikmittelpunkt in den Ursprung, so sind die benachbarten Kreise konzentrisch und radial bezogen; der allgemeine Fall folgt daraus wiederum durch Bewegung der Kugel.

Um den bisher ausgeschlossenen Fall eines *hyperbolischen Paraboloides* kurz zu streifen, gehen wir etwa von der Fläche

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 2\,x_3$$

mit der Parameterdarstellung

---

[5] Bekanntlich kann man einen sphärischen Kegelschnitt je nach der Wahl der Brennpunkte als sphärische Ellipse oder Hyperbel ansehen.

[6] Für jedes System konfokaler sphärischer Kegelschnitte ist *Ivory*'s Diagonaleigenschaft erfüllt. Vgl. die Literaturangaben in *W. Blaschke*, Vorl. ü. Differentialgeometrie I (3. Aufl., Berlin 1930), S. 192/193.

$$x_1 = a_1 \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad x_2 = a_2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}, \quad x_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{2}$$

aus. Die Erzeugendenscharen sind bereits durch $\mu_i = \text{konst.}$ bestimmt; wir finden für sie leicht die dualen Einheitsvektoren: (Trennung der beiden Scharen wiederum durch die beiden Stellungen des Vorzeichens!)

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2W}[(2a_1 \mp \varepsilon a_2 \lambda^2)\mathfrak{e}_1 + (\pm 2a_2 - \varepsilon a_1 \lambda^2)\mathfrak{e}_2 + 2(1 \pm \varepsilon a_1 a_2)\lambda \mathfrak{e}_3]$$

Hiebei ist $w = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \lambda^2}$ und λ der Scharparameter. Entsprechend den Richtebenen

$$\frac{x_1}{a_1} \mp \frac{x_2}{a_2} = 0$$

der beiden Regulusse erhalten wir zwei Größtkreise der Kugel als Ort der ersten Bildpunkte $\mathfrak{a}$. Setzen wir

$$\lambda = \frac{2\nu}{1-\nu^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

führen wir also ν als neuen Parameter ein, so finden wir für die von den zweiten Bildpunkten $\mathfrak{A}$ beschriebenen Kurven rationale Parameterdarstellungen. Eine gewisse Vorstellung über das Verhalten dieser Kurven bekommen wir, wenn wir für den Augenblick ε^2 als sehr klein, jedoch von Null verschieden ansehen. Obige Parameterdarstellung liefert dann jeweils eine rationale Raumkurve vierter Ordnung erster Art, die in der „Nähe" eines Hauptkreises der Einheitskugel verläuft und für $\nu = \pm 1$ einen Doppelpunkt in der Fernebene besitzt. Dieser Punkt geht für $\varepsilon^2 \to 0$ in jene singuläre Stelle unserer Bildkurve $\mathfrak{A}$ über, die der uneigentlichen Erzeugenden des auf dem hyperbolischen Paraboloid liegenden Regulus jeweils entspricht.

Schließlich können wir noch den Ausartungsfall eines *Kegels* betrachten: Der Spitze entspricht eine infinitesimale Kugeldrehung, wie im nächsten Abschnitt ausgeführt werden soll, durch die die beiden kongruenten Bildkurven (sphärische Kegelschnitte mit dem Sonderfall von Kreisen für Drehkegel) ineinander übergeführt werden. (Vgl. auch den Abschnitt 10, wo das Bild einer allgemeinen Kegelfläche untersucht wird.)

5.

Für alle Strahlen $\mathfrak{A}$ eines *Strahlbündels* mit dem Scheitel $\mathfrak{x} = \overline{\mathcal{P}}\mathfrak{p}$, $(\mathfrak{p}^2 = 1)$ ist die Inzidenzbedingung $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{a}$ erfüllt; es gilt also die Darstellung (3), die besagt, daß der erste Bildpunkt $\mathfrak{a}$ eines beliebigen

Strahles $\mathfrak{A}$ eine Drehung in seinen zweiten Bildpunkt $\mathfrak{A}$ erfährt. $\mathfrak{p}$ ist hiebei die Drehachse, $\varepsilon \overline{\vartheta}$ der infinitesimale Drehwinkel. *Als Bild eines eigentlichen Strahlbündels erhalten wir somit eine infinitesimale Bewegung (kongruente Transformation) der Einheitskugel in sich.* Eine solche Transformation können wir auch als *Bild eines Punktes im Strahlraum* ansehen, womit die Bezeichnung „infinitesimale kinematische Abbildung" gerechtfertigt ist.

Als Bild des Ursprunges 0 (Mittelpunkt der Bildkugel) ergibt sich die identische Transformation (Ruhe). — Da auch umgekehrt eine Drehung um eine Achse $\mathfrak{p}$ durch einen infinitesimalen Winkel $\varepsilon \overline{\vartheta}$ als Bild eines Strahlbündels mit dem Träger $\mathfrak{x} = \overline{\vartheta}\, \mathfrak{p}$ aufgefaßt werden kann, ist somit der Euklidische Punktraum umkehrbar eindeutig auf die Gruppe der infinitesimalen Bewegungen der Einheitskugel bezogen und fungiert als Parameterraum der infinitesimalen Euklidischen Kinematik der Einheitskugel. (Vgl. auch Abschnitt 20.)

Bei Zugehörigkeit eines Strahles zu einem *Parallelstrahlbündel* ist $\mathfrak{a} =$ konst. und $\bar{\mathfrak{a}}$ nur an die Bedingung $\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = 0$ gebunden. Die ersten Bildpunkte $\mathfrak{a}$ der Strahlen eines Parallelstrahlbündels (uneigentlicher Punkt im Strahlraum) fallen somit zusammen, die zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}$ erfüllen die ganze infinitesimale Umgebung von $\mathfrak{a}$.

6.

Wir betrachten nun eine *Ebene* durch den Ursprung, ihr Normaleneinheitsvektor sei $\mathfrak{p}$, ihre Gleichung somit $\mathfrak{p}\,\mathfrak{x} = 0$. Eine Gerade $\mathfrak{A}$ dieser Ebene mit der Richtung $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}^2 = 1$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p} = 0$) kann durch den dualen Vektor $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\lambda\,\mathfrak{p}$ erfaßt werden, wobei die skalare Größe λ den Abstand vom Ursprung mißt. Variieren $\mathfrak{a}$ und λ, so erhalten wir sämtliche Geraden dieser Durchmesserebene der Bildkugel. Für ihr sphärisches Bild gilt: Die ersten Bildpunkte $\mathfrak{a}$ liegen auf einem Größtkreis der Kugel in der Ebene $\mathfrak{p}\,\mathfrak{x} = 0$, die dazu benachbarten zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}$ erfüllen etwa die Punkte einer infinitesimalen Strecke, die vom jeweiligen ersten Bildpunkt $\mathfrak{a}$ aus senkrecht zur Kreisebene aufgetragen wird. — Verschieben wir die ganze Ebene in der Richtung $\mathfrak{p}$ um die Schiebstrecke $\overline{\vartheta}$, so erhalten wir (vgl. (2)!) das sphärische Bild des Strahlfeldes der Ebene $\mathfrak{p}\,\mathfrak{x} = \overline{\vartheta}$ (allgemeine Lage): Der Größtkreis als Ort der ersten Bildpunkte bleibt unverändert, alle zweiten Bildpunkte, die jeweils wiederum eine infinitesimale Strecke in der Richtung $\mathfrak{p}$ erfüllen, erleiden eine infinitesimale Drehung um die Achse $\mathfrak{p}$ durch den Winkel $\varepsilon \overline{\vartheta}$, denn es ist ja

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \varepsilon \overline{\mathfrak{v}} (\mathfrak{p} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{a} + \varepsilon [\lambda \mathfrak{p} + \overline{\mathfrak{v}} (\mathfrak{p} \times \mathfrak{a})].$$

Dieser Zerlegung der Bildmannigfaltigkeit entspricht die Auflösung des Strahlfeldes in Parallelstrahlbüschel.

7.

Um die sphärische Abbildung eines *Strahlnetzes (lineare Kongruenz)* zu verfolgen, gehen wir zweckmäßig von einem hyperbolischen Netz aus, dessen reelle Brennlinien $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1,2)$ durch die benachbarten Punktepaare $\mathfrak{f}_i$ und $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{f}_i + \varepsilon \bar{\mathfrak{f}}_i$ abgebildet werden. Da die Brennlinien zueinander windschief sein sollen, können wir $\cos \eta = \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \neq \neq \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = \cos (\eta + \varepsilon \bar{\eta})$ also $\bar{\eta} \neq 0$ voraussetzen. — Für alle Strahlen $\mathfrak{A}$ des Netzes müssen nun die Inzidenzbedingungen mit beiden Brennlinien erfüllt sein, was sich dahin auswirkt, daß die sphärischen Abstände der ersten Bildpunkte $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ mit den sphärischen Abständen der zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}_1$, bzw. $\mathfrak{F}_2$ übereinstimmen:

$$\varphi_i = \Phi_i, \cos \varphi_i = \mathfrak{a}\, \mathfrak{f}_i, \cos \Phi_i = \mathfrak{A}\, \mathfrak{F}_i.$$

Man kann etwa den Punkt $\mathfrak{a}$ willkürlich annehmen und dazu in eindeutiger Weise — $\mathfrak{A}$ muß ja zu $\mathfrak{a}$ infinitesimal benachbart sein — den Bildpunkt $\mathfrak{A}$ als Schnittpunkt von zwei Kreisen auf der Kugel konstruieren. *Die ein Strahlnetz abbildende infinitesimale Punktverwandtschaft auf der Einheitskugel wird also das infinitesimale sphärische Analogon zu der von L. Burmester*[7] *behandelten bifokalen Verwandtschaft der Ebene sein.* — Unter Zulassung komplexer Punkte gelten diese Überlegungen auch für elliptische Strahlnetze. — Lassen wir den Punkt $\mathfrak{a}$ jeweils auf einem sphärischen Kegelschnitt mit den Brennpunkten $\mathfrak{f}_i$ wandern, so bewegt sich auch $\mathfrak{A}$ auf einem benachbarten sphärischen Kegelschnitt, wobei $\mathfrak{F}_i$ als Brennpunkte fungieren und die Hauptachsenlänge erhalten bleibt. *Die Abbildung einer linearen Strahlkongruenz entspricht somit der infinitesimalen Transformation des Systems konfokaler, sphärischer Kegelschnitte auf der Einheitskugel mit den Brennpunkten $\mathfrak{f}_i$ in ein benachbartes System konfokaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten $\mathfrak{F}_i$.*

Vom Bild eines Strahlnetzes kann man sich auch dadurch eine Vorstellung machen, daß man sich das Netz in ∞^1 Regulusse zerfällt denkt und auf deren Abbildung zurückgeht. So wird man etwa ein elliptisches

---

[7] *L. Burmester*, Über das bifokal veränderliche System, Math. Ann. 16 (1880), S. 89—111, sowie Lehrbuch der Kinematik (Leipzig 1888), 2. Bd., S. 912.

Strahlnetz derart in Regelscharen zerlegen, daß die Achsen der zugehörigen einschaligen Hyperboloide mit dem Hauptstrahl, bzw. den Achsen des Netzes zusammenfallen. Für ein *Drehnetz* ergibt sich eine einfache Konstruktion, wenn man noch den Mittelpunkt des Netzes geeignet in den Ursprung verschiebt: Wir erhalten die Parameterdarstellung aus der der Regelscharen einer Mittelpunktquadrik (vgl. Abschnitt 4!), wenn wir dort $a_1 = a_2$ als zweiten Parameter (neben φ) ansehen. Die benachbarten Bildpunkte eines Netzstrahles $\mathfrak{A}$ liegen auf Größtkreisen durch die (bei der speziellen Lage zusammenfallenden) Bildpunkte des Hauptstrahls $\mathfrak{e}_3$ unseres Drehnetzes in den sphärischen Abständen ψ, bzw. Ψ. Hiebei ist

$$\cos\psi = \mathfrak{a}\,\mathfrak{e}_3 = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}},\quad \cos\Psi = \mathfrak{A}\,\mathfrak{e}_3 = \frac{A_3}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}},$$

$$\Psi = \psi \pm \varepsilon\, a_1 = \psi \pm \varepsilon\, a_3 \operatorname{tg}\psi.$$

Die das Netz abbildende infinitesimale Punktverwandtschaft besteht also in der radialen Zuordnung der konzentrischen Kreise mit den sphärischen Radien ψ und Ψ; für die allgemeine Lage des Netzes ergibt sich wiederum das Bild durch die entsprechenden Kugeldrehungen.

Im Falle eines *parabolischen Strahlnetzes* (spezielles Strahlnetz) ist die Zerlegung in Strahlbüschel zweckmäßig. Die allgemeine Lage im Raum kann wiederum aus der Speziellen hergeleitet werden, bei der die Brennlinie so durch den Ursprung geht, daß in ihn der Zentralpunkt der Korrelation zwischen den Scheiteln und Ebenen der Strahlbüschel zu liegen kommt. Mit Hilfe der metrischen Eigenschaften dieser Korrelation ($\operatorname{tg}\tau = K \cdot t$, K = konst., τ = Neigungswinkel der Büschelebene gegen die Zentralebene, t = Abstand des Büschelscheitels vom Zentralpunkt) kann man leicht die durch ein parabolisches Strahlnetz auf der Bildkugel hervorgerufene infinitesimale Punktverwandtschaft überblicken. —

8.

Ein *spezieller linearer Strahlkomplex (Strahlgebüsch)* besteht aus allen Treffgeraden einer festen Achse $\mathfrak{V}$. Aus der Schnittbedingung (vgl. Abschnitt 2) ergibt sich sofort: *Die Bildpunktepaare der Strahlen $\mathfrak{A}$ eines speziellen linearen Strahlkomplexes liegen auf kongruenten, benachbarten Kreisen um die benachbarten Bildpunkte* ($\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$) *der Achse*[8].

[8] Natürlich sind hiebei nur benachbarte Punkte dieser beiden Kreise als Bilder von Komplexstrahlen anzusehen.

In Verallgemeinerung unserer ursprünglichen Abbildung kann man nun diesen „speziellen linearen Komplex infinitesimal benachbarter Punktepaare" als Bild der Achse $\mathfrak{V}$ ansehen. Diese Auffassung ist von Vorteil, wenn es sich darum handelt, eine Ferngerade abzubilden, also unsere Abbildung auf den projektiven Geradenraum auszudehnen. Die Gesamtheit der Bildpunktepaare aller Geraden des Raumes parallel zu einer festen Richtebene kann als Bild der uneigentlichen Achse dieses speziellen linearen Komplexes, also als Bild einer uneigentlichen Geraden des projektiven Strahlraumes angesehen werden. *Eine uneigentliche Gerade besitzt somit ein „uneigentliches Bildpunktepaar", das durch einen speziellen linearen Komplex infinitesimal benachbarter Bildpunkte als Bild jenes Strahlgebüsches dargestellt wird, dessen Achse die uneigentliche Gerade ist.*

9.

Ein dualer Vektor $\mathfrak{W} = \mathfrak{w} + \varepsilon \overline{\mathfrak{w}}$, $(\mathfrak{W}^2 \neq 1)$ repräsentiert einen *allgemeinen linearen Strahlkomplex (Strahlgewinde)*, nämlich die Gesamtheit aller Strahlen $\mathfrak{A}$ des Raumes, die der Bedingung $\mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{w}} + \overline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{w} = 0$ genügen. Die Zuordnung zwischen Gewinde und dualem Vektor $\mathfrak{W}$ ist bis auf einen reellen Faktor eindeutig. Aus $\mathfrak{W}$ bilden wir den dualen Einheitsvektor

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{v} + \varepsilon \overline{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{W}}{\sqrt{\mathfrak{W}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{w}^2}} [\mathfrak{w} + \varepsilon (\overline{\mathfrak{w}} - k\,\mathfrak{w})]$$

mit $k = \dfrac{\mathfrak{w}\,\overline{\mathfrak{w}}}{\mathfrak{w}^2}$; $\mathfrak{V}$ legt die Achse des Gewindes fest. Die Gewindegleichung kann nun in der Form $\mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{v}} + \overline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{v} + k\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{v} = 0$ geschrieben werden, woraus wir sofort

$$\cos \boldsymbol{\Phi} = \cos (\varphi + \varepsilon \overline{\varphi}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{V} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{v}\,(1 - \varepsilon k) = (1 - \varepsilon k) \cos \varphi$$

finden. Daraus ergibt sich aber die bekannte Bedingung $\overline{\varphi} \,.\, \operatorname{tg} \varphi = k$ zwischen dem kürzesten Abstand $\overline{\varphi}$ und dem Winkel φ eines Komplexstrahls $\mathfrak{A}$ und der Achse $\mathfrak{V}$. Für unsere sphärische Abbildung des Gewindes erhalten wir somit: *Die Bildpunktepaare der Strahlen eines allgemeinen linearen Komplexes liegen auf benachbarten Kreisen, deren Mittelpunkte* $\mathfrak{v}$ *und* $\mathfrak{V}$ *und deren Radien* φ, *bzw.* $\boldsymbol{\Phi} = \varphi + \varepsilon k \operatorname{ctg} \varphi$ *sind.*

In ähnlicher Weise ergibt sich für das sphärische Bild zweier *vertauschbarer Gewinde* $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ aus der charakteristischen Bedingung

$\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{w}}' + \bar{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{w}' = 0$ folgendes Kennzeichen: Die sphärischen Bildpunktepaare der Achsen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ der beiden vertauschbaren Strahlgewinde besitzen voneinander, bzw. die sphärischen Abstände ψ und

$$\Psi = \psi + \varepsilon\,(k + k')\,\operatorname{ctg}\psi.$$

Nun noch einige Überlegungen differentialgeometrischer Natur!

10.

Bei Abhängigkeit eines dualen Einheitsvektors $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(t) = \mathfrak{a}(t) + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}(t)$ von einem reellen Parameter t beschreibt die entsprechende Gerade des Strahlraums im allgemeinen eine *Regelfläche, deren Bild aus einem Paar benachbarter sphärischer Kurven besteht.* Da der *Drall* der Regelfläche in einer Erzeugenden $\mathfrak{A}$ durch $D = \dfrac{d\,\mathfrak{a}\,.\,d\,\bar{\mathfrak{a}}}{d\,\mathfrak{a}^2} = \dfrac{d\bar{s}}{ds}$ gegeben ist und wir für die Bogenelemente der sphärischen Bildkurven $ds^2 = d\,\mathfrak{a}^2$, bzw.

$$d\,S^2 = d\,\mathfrak{A}^2 = d\,\mathfrak{a}^2 + 2\,\varepsilon\,d\,\mathfrak{a}\,d\,\bar{\mathfrak{a}} = d\,s^2 + 2\,\varepsilon\,ds\,d\bar{s} = ds^2\,(1 + 2\,\varepsilon\,D)$$

erhalten, sehen wir sofort, daß die *relative Änderung des Bogenelementes* bei Übergang von der sphärischen Kurve $\mathfrak{a}\,(t)$, die auch als Schnitt des Richtkegels mit der Kugel erhalten werden kann, zur infinitesimal benachbarten Kurve $\mathfrak{A}\,(t)$ im Wesentlichen durch den Drall der geradlinigen Fläche dargestellt wird. Wir finden nämlich:

$$\frac{d\,S - d\,s}{d\,s} = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon D} - 1 = \varepsilon\,D. \tag{5}$$

Die dem Übergang zur Nachbarkurve $\mathfrak{A}\,(t)$ entsprechende erste Variation der Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{a}\,(t)$ ist daher $\delta\,s = \varepsilon \int D\,d\,s$.

Für $D = 0$, also für die abwickelbaren Flächen des Strahlraumes verschwindet $\delta\,s$, wird also $ds = dS$. *Den Torsen des Strahlraumes entsprechen somit isometrisch aufeinander bezogene benachbarte Kurvenpaare der Einheitskugel und umgekehrt. — Einer Kegelfläche* mit dem Scheitel $\mathfrak{x} = \bar{\mathcal{P}}\,\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p}^2 = 1)$ entspricht *ein Paar von kongruenten Bildkurven*, die durch Drehung um $\mathfrak{p}$ durch den Winkel $\varepsilon\,\bar{\mathcal{P}}$ ineinander übergehen. (Die beiden Bildkurven müssen ja in der dem Scheitel entsprechenden infinitesimalen Bewegung enthalten sein.)

Das begleitende Dreibein der Regelfläche, bestehend aus der Erzeugenden $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, der Zentralnormalen $\mathfrak{A}_2$ und der Zentraltangente $\mathfrak{A}_3$, steht naturgemäß auch in einfachem Zusammenhang mit den begleitenden Dreibeinen des sphärischen Bildkurvenpaares unserer Regelfläche; hiebei sind diesen Größen des Strahlraumes in der angeführten

Reihenfolge die Flächennormalen, die Kurventangenten und die Kurvennormalen, die in den Tangentialebenen der beiden benachbarten Bildkurven liegen, zugeordnet. Die Krümmungsachse einer Regelfläche entspricht dem sphärischen Krümmungsmittelpunkt der Bildkurve auf der dualen Einheitskugel. In unserer reellen Abbildung wird sich daher die von der Krümmungsachse beschriebene Evolutenfläche als sphärisches Evolutenpaar der beiden benachbarten Bildkurven der Regelfläche darstellen. Letztere bestimmen auf der Bildkugel Flächenstreifen, deren jeweilige Momentanschraubungen durch Vektoren charakterisiert werden können, die die Rolle der *Darboux*schen Drehvektoren bei Raumkurven übernehmen.[9] Die Richtungen (Einheitsvektoren) dieser „Schraubvektoren" decken sich jeweils mit den Binormalen der betreffenden sphärischen Kurven — für Krümmungsstreifen gilt dies immer — und bestimmen, als Ortsvektoren aufgefaßt, obiges Evolutenpaar auf der Bildkugel.[10] — Jene beiden benachbarten sphärischen Kegelschnitte, die als Bildkurven des Schmiegregulus einer Regelfläche fungieren, werden im Bildpunktepaar der Berührungserzeugenden $\mathfrak{A}$ die beiden Bilder der Regelfläche oskulieren. Hiebei ist der Schmiegregulus der Fläche $\mathfrak{A}(t)$ durch Linearkombination $\mathfrak{S} = \sigma_1 \mathfrak{A} + \sigma_2 \mathfrak{A}' + \sigma_3 \mathfrak{A}''$ mit reellen Parametern σ_i und der dualen Bedingungsgleichung $\mathfrak{S}^2 = 1$ bestimmt.

11.

Werden die sämtlichen Strahlen eines *Strahlsystems (Strahlkongruenz)* auf benachbarte Punktepaare der Einheitskugel abgebildet, so entsteht eine infinitesimale Transformation (infinitesimale Punktverwandtschaft), die die Einheitskugel in sich oder wenigstens einen Teilbereich der Einheitskugel (Definitionsbereich) in wiederum einen solchen überführt. Das Strahlsystem sei durch $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(u, v)$ gegeben; aus dem dualen Bogenelement

$$d\mathfrak{S}^2 = d\mathfrak{s}^2 + 2\,\varepsilon\, d\mathfrak{s}\, d\bar{\mathfrak{s}} = I + \varepsilon\, II = d\mathfrak{A}^2 = d\mathfrak{a}^2 + 2\,\varepsilon\, d\mathfrak{a}\, d\bar{\mathfrak{a}} =$$
$$= E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G dv^2,$$

d. h. aus den beiden quadratischen Grundformen

---

[9] Vgl. *W. Blaschke*, Vorl. ü. Differentialgeometrie I (3. Aufl., Berlin 1930), S. 83.

[10] Man kann die Krümmungsachse einer Regelfläche auch als duale Übertragung des *Darboux*schen Drehvektors einer Raumkurve ansehen!

$$I = ds^2 = d\mathfrak{a}^2 = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$$
$$II = 2\,ds\,d\bar{s} = 2\,d\mathfrak{a}\,d\bar{\mathfrak{a}} = \bar{e}\,du^2 + 2\,\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2,$$

wobei $E = e + \varepsilon\,\bar{e}$, $F = f + \varepsilon\,\bar{f}$, $G = g + \varepsilon\,\bar{g}$, erkennen wir sofort die Änderungen der Bogenlängen eines Bildkurvenpaares, das einer in der Kongruenz enthaltenen Regelfläche entspricht. Nach (5) ist der Zusammenhang zwischen der relativen Änderung des Bogenelementes bei Übergang von der ersten zur zweiten, der benachbarten Bildkurve und dem Drall dieser Regelfläche durch

$$\frac{dS - ds}{ds} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{II}{I} = \varepsilon\,D$$

gegeben. — Als Flächen extremen Dralls sind daher die *Hauptflächen* einer Strahlkongruenz dadurch charakterisiert, daß die entsprechenden Bildkurvenpaare der Kugel die größte, bzw. kleinste relative Änderung des Bogenelementes aufweisen. — Die in einem Strahlsystem enthaltenen *Torsen* hingegen sind wegen $II = 0$ oder $D = 0$ durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß ihnen isometrisch bezogene Bildkurvenpaare auf der Einheitskugel entsprechen: $ds = dS$. — Für das Oberflächenelement ergibt sich

$$d\Omega = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{eg - f^2 + \varepsilon\,(e\bar{g} - 2\,f\,\bar{f} + \bar{e}g)} =$$
$$= (1 + 2\,\varepsilon\,h)\sqrt{eg - f^2}\,du\,dv$$

also

$$d\,\Omega = (1 + 2\,\varepsilon\,h)\,d\omega, \tag{6}$$

wobei

$$d\,\omega = \sqrt{eg - f^2}\,du\,dv \text{ und } h = \tfrac{1}{4}\,\frac{e\bar{g} - 2\,f\,\bar{f} + \bar{e}g}{eg - f^2}$$

die mittlere Krümmung des Strahlsystems ist. Im sphärischen Bild kann somit

$$\frac{d\,\Omega - d\,\omega}{d\,\omega} = 2\,\varepsilon\,h$$

als *relative Änderung des Oberflächenelementes* gedeutet werden. — Die erste Variation der Bogenlänge, wie der Oberfläche kann durch einfache Integration gefunden werden.

Diese Transformationen der Einheitskugel in sich, die einem Punkt $\mathfrak{a}$ den Punkt $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}$ zuordnen (Bildpunktepaar eines Kongruenzstrahls), sollen nun für die wichtigsten Strahlsysteme der metrischen Liniengeometrie untersucht werden.

12.

In Abschnitt 5 haben wir erkannt, daß den Strahlbündeln des Raumes in umkehrbar eindeutiger Weise infinitesimale Drehungen, also kongruente Transformationen der Einheitskugel in sich entsprechen. Wir wollen nun noch ergänzend zeigen, wie bereits aus der bloßen Forderung der *Isometrie* einer solchen infinitesimalen Transformation auf den Charakter einer infinitesimalen Drehung als Bild eines Strahlbündels geschlossen werden kann.

Soll $ds = dS$ sein, so muß für jede Fortschreitungsrichtung $II = 2\,d\,\mathfrak{a}\,d\,\bar{\mathfrak{a}} = 0$ gelten, d. h. aber: Jede in der Strahlkongruenz enthaltene Regelfläche ist abwickelbar. Treffen wir in $\mathfrak{A}(u, v) = \mathfrak{a}(u, v) + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}(u, v)$ den Ansatz $\bar{\mathfrak{a}}(u, v) = \mathfrak{p}(u, v) \times \mathfrak{a}(u, v)$, so ist bereits $\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = 0$ erfüllt und muß dem Vektor $\mathfrak{p}(u, v)$ nur noch die Bedingung $d\,\mathfrak{a}\,d\,\bar{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}\,d\,\mathfrak{a}\,d\,\mathfrak{p}) = 0$ auferlegt werden, die mit

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{p}_u) = 0,\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v\,\mathfrak{p}_v) = 0,\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{p}_v) + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v\,\mathfrak{p}_u) = 0$$

gleichwertig ist. Der Ansatz

$$\mathfrak{p}_u = \lambda\,\mathfrak{a} + \mu\,\mathfrak{a}_u,\quad \mathfrak{p}_v = \nu\,\mathfrak{a} + \mu\,\mathfrak{a}_v$$

genügt diesen drei Bedingungen und führt zur Integrabilitätsbedingung

$$(\lambda_v - \nu_u)\,\mathfrak{a} + (\lambda - \mu_u)\,\mathfrak{a}_v + (\mu_v - \nu)\,\mathfrak{a}_u = 0,$$

die wegen $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v) \neq 0$ mit $\lambda = \mu_u$, $\nu = \mu_v$, $\lambda_v = \nu_u$ äquivalent ist. μ kann daher eine willkürliche Funktion von u und v sein. Wir finden: $\mathfrak{p}_u = (\mu\,\mathfrak{a})_u$, $\mathfrak{p}_v = (\mu\,\mathfrak{a})_v$ und weiters $\mathfrak{p} = \mu\,\mathfrak{a} + \mathfrak{p}_0$ ($\mathfrak{p}_0 =$ konst.). Eine Strahlkongruenz, deren sphärisches Bild eine infinitesimale, isometrische Transformation ist, kann daher in der Gestalt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}(u, v) + \varepsilon\,(\mathfrak{p}_0 + \mu(u, v)\,.\,\mathfrak{a}(u, v)) \times \mathfrak{a}(u, v)$$
$$\text{oder } \mathfrak{A} = \mathfrak{a}(u, v) + \varepsilon\,(\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{a}(u, v))$$

geschrieben werden, woraus wir erkennen, daß es sich hiebei tatsächlich um eine infinitesimale Drehung um die Achse $\mathfrak{p}_0$ durch den Winkel $\varepsilon\,|\,\mathfrak{p}_0\,|$ handelt, die Strahlkongruenz im Raum also ein Strahlbündel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}_0$ ist.

13.

Um zu entscheiden, welche Strahlsysteme den *flächentreuen, infinitesimalen Transformationen* der Kugel in sich entsprechen, setzen wir $d\,\Omega = d\,\omega$, was wegen (6) auf $h = 0$ führt. Durch das Verschwinden der mittleren Krümmung sind aber bekanntlich die *Normalensysteme* gekennzeichnet; auch umgekehrt bildet sich jedes Normalensystem durch eine flächentreue infinitesimale Transformation der Einheitskugel ab. Ausgehend von einem isothermen Parameterliniennetz ($e = \mathfrak{a}_u^2 = .\ g = \mathfrak{a}_v^2 = \lambda,\ f = \mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v = 0$) können wir leicht alle flächentreuen infinitesimalen Transformationen der Einheitskugel in sich aufstellen. Wir treffen den Ansatz

$$\bar{\mathfrak{a}} = \alpha\,\mathfrak{a}_u + \beta\,\mathfrak{a}_v \tag{7}$$

und gehen in $h = 0$ oder $\bar{e} + \bar{g} = 0$ ein. Wegen

$$\left.\begin{aligned} \bar{e} &= 2\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_u = 2\,\alpha_u\,\lambda + \alpha\,\lambda_u + \beta\,\lambda_v \\ \bar{f} &= \mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v + \bar{\mathfrak{a}}_u\,\mathfrak{a}_v = (\alpha_v + \beta_u)\,\lambda \\ \bar{g} &= 2\,\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_v = 2\,\beta_v\,\lambda + \alpha\,\lambda_u + \beta\,\lambda_v \end{aligned}\right\}$$

erhält man $(\alpha\,\lambda)_u + (\beta\,\lambda)_v = 0$ oder $\alpha = \frac{1}{\lambda}\,\mu_v,\ \beta = -\frac{1}{\lambda}\,\mu_u$, wobei $\mu = \mu\,(u, v)$ eine beliebige Funktion ist. Da die Torsen eines Normalensystems ein orthogonales Flächennetz bilden, werden auf der Einheitskugel, die sich bei einer flächentreuen infinitesimalen Transformation isometrisch transformierenden Kurven senkrecht schneiden. Man kann natürlich auch sofort direkt folgern, daß die Lösungen von $II = 0$ ein orthogonales Netz bilden, wenn $h = 0$.

14.

Um zu zeigen, daß eine *konforme infinitesimale Transformation* der Einheitskugel in sich für die Abbildung eines *isotropen Strahlsystems* kennzeichnend ist, gehen wir von der hiefür charakteristischen Bedingung $e:f:g = \bar{e}:\bar{f}:\bar{g}$ aus. Setzen wir $\frac{\bar{e}}{e} = \frac{\bar{f}}{f} = \frac{\bar{g}}{g} = \mu$, so ergibt sich für die Bogenelemente $dS^2 = (1 + \varepsilon\,\mu)\,ds^2$. Dies bedeutet aber die Winkeltreue der infinitesimalen Transformation. Wir finden eine Darstellung aller konformen infinitesimalen Transformationen der Einheitskugel in sich, wenn wir zweckmäßig isotherme Parameter verwenden, gleichfalls vom Ansatz (7) ausgehen und $\bar{e} = \bar{g},\ \bar{f} = 0$ setzen.

Dies führt auf die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen $\alpha_u - \beta_v = 0$, $\alpha_v + \beta_u = 0$ und somit auf eine willkürliche analytische Funktion $\alpha + i\beta = f(u + iv)$ oder im Fall einer uneigentlich winkeltreuen Abbildung auf $\alpha + i\beta = f(u - iv)$.

15.

In einem *parabolischen Strahlsystem*, das im allgemeinen aus den Tangenten der einen Schar von Asymptotenlinien einer Fläche (einzige Brennfläche des Systems) besteht, fallen die beiden Torsenscharen zusammen. Im sphärischen Bild einer solchen Strahlkongruenz erhalten wir daher eine infinitesimale Transformation der Einheitskugel in sich, die nur eine einzige sich isometrisch transformierende Kurvenschar der Kugel aufweist, durch welche Eigenschaft auch das Strahlsystem als parabolisch bestimmt ist.

16.

In einem *Guichard*schen *Strahlsystem* werden die Brennflächen von den Torsen längs Krümmungslinien berührt. Bei Einführung von Torsenparametern läßt sich das duale Bogenelement auf die Gestalt

$$dS^2 = du^2 + 2(f + \varepsilon \bar{f})\, du\, dv + dv^2$$

bringen, woraus wir sofort für unsere sphärische Abbildung die charakteristische Eigenschaft erkennen, daß die sich isometrisch transformierenden Parameterkurven (u, v-Linien) auf der Kugel ein *Tschebyscheff*-Netz, also ein Netz von infinitesimalen Rhomben (Fischnetz) bilden. Die Ermittlung aller Strahlsysteme dieser Art führt bekanntlich auf eine *Laplace*sche Differentialgleichung.

17.

Für die auch nach *Bianchi* benannten *pseudosphärischen Strahlkongruenzen* sind Krümmungsmaß k und mittlere Krümmung h konstant, war zur Folge hat, daß auch die beiden Brennflächen festes *Gauß*sches Krümmungsmaß besitzen (pseudosphärische Flächen). Um dieses Strahlsystem in der Abbildung auf benachbarte Punktepaare der Einheitskugel zu beschreiben und Rechenaufwand zu vermeiden, führen wir die Hauptflächen als Parameterflächen u, v ein ($f = \bar{f} = 0$). Die Ausdrücke für das Krümmungsmaß k und die mittlere Krümmung h des Strahlsystems vereinfachen sich nun:

$$k = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\bar{e} \cdot \bar{g}}{e \cdot g}, \qquad h = \tfrac{1}{4} \left(\frac{\bar{e}}{e} + \frac{\bar{g}}{g} \right)$$

Die Verhältnisse $\frac{e}{e} = \eta$, $\frac{\bar{g}}{g} = \gamma$ bleiben als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 4\,h\,x + 4\,k = 0$ mit konstanten Koeffizienten selbst konstant. Mit Hilfe von $ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$, $dS^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$ und $E = e\,(1 + \varepsilon\,\eta)$, $G = g\,(1 + \varepsilon\,\gamma)$ berechnen wir nun die Schnittwinkel λ und Λ der sich isometrisch transformierenden Kurven, sowie der entsprechenden benachbarten Kurven. Vor, wie nach der infinitesimalen Transformation sind diese Kurven durch $II = \bar{e}\,du^2 + \bar{g}\,dv^2 = 0$ festgelegt. Wir finden

$$\cos\lambda = \frac{e\,du\,\delta u + g\,dv\,\delta v}{\sqrt{e\,du^2 + g\,dv^2} \cdot \sqrt{e\,\delta u^2 + g\,\delta v^2}} = \frac{\eta + \gamma}{\eta - \gamma} = \text{konst.}$$

$$\cos\Lambda = \frac{E\,du\,\delta u + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2} \cdot \sqrt{E\,\delta u^2 + G\,\delta v^2}} = \frac{\eta + \gamma}{\eta - \gamma} + \varepsilon \frac{2\,\eta\,\gamma}{\eta - \gamma} = \text{konst.}$$

Auch umgekehrt kann man aus der Konstanz von λ und Λ auf die von η und γ und damit auch von h und k schließen.

Die den *pseudosphärischen Strahlsystemen* entsprechenden infinitesimalen Transformationen der Kugel in sich sind also dadurch gekennzeichnet, daß *die sich isometrisch transformierenden Kurven einen konstanten Winkel einschließen, aber auch nach der infinitesimalen Transformation sich wiederum unter festem Winkel schneiden.*

In anderer Weise können wir unsere infinitesimale Transformation der Einheitskugel dadurch charakterisieren, daß wir die relative Änderung des Bogenelementes unserer Parameterlinien u, v ermitteln. Da wir die Hauptflächen als Parameterflächen wählten, nimmt diese dem Drall entsprechende relative Änderung extreme Werte an. Wir finden:

$$\frac{dS - ds}{ds} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{II}{I} = \begin{cases} \frac{\varepsilon\,\eta}{2} \ldots\ldots dv = 0 \\ \frac{\varepsilon\,\gamma}{2} \ldots\ldots du = 0 \end{cases}$$

Diese extremen Änderungen des Bogenelementes sind somit konstant und von der betrachteten Stelle unabhängig; im Strahlraum besitzen die entsprechenden Hauptflächen konstanten Drall. Auch diese Eigenschaft ist für die *Bianchi*schen Systeme kennzeichnend.

18.

Nun wollen wir noch kurz *kontinuierliche infinitesimale Bewegungen* der Bildkugel betrachten. — Wir denken uns die Kugel doppelt überdeckt: Gegenüber der festen Kugel $\varkappa$ der ersten Bildpunkte sei die infinitesimal benachbarte Kugelschale K der zweiten Bildpunkte beweglich. Zu jedem „Soma" K, also jeder Lage von K gegen $\varkappa$ gehört eine infinitesimale Drehung der Bildkugel, nämlich von $\varkappa$ nach K, der im Strahlraum ein Punkt als Träger eines Strahlbündels zugeordnet ist.

Einer kontinuierlichen infinitesimalen Bewegung, also einer stetigen Somenmannigfaltigkeit $\{ K \}$ entspricht somit im Raum eine stetige Kurve k, die *Bildkurve der kontinuierlichen Bewegung*. Halten wir im Ursoma $\varkappa$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$ als ersten Bildpunkt eines bestimmten ins Auge gefaßten Strahles fest, so durchläuft der entsprechende zweite Bildpunkt $\mathfrak{A}$ eine Bahnkurve der kontinuierlichen Bewegung. Ihre Punkte sind zusammen mit dem ersten festen Bildpunkt $\mathfrak{a}$ das sphärische Bild der vom betrachteten Strahl beschriebenen Regelschar, nämlich der Erzeugenden jenes Zylinders, der im Strahlraum in der Richtung $\mathfrak{a}$ durch die Bildkurve k der Bewegung gelegt werden kann.

Die beiden isometrisch bezogenen Bildkurven $\{ \mathfrak{p} \}$, $\{ \mathfrak{P} \}$ der Tangentenfläche der Kurve k fungieren für unsere infinitesimale stetige Bewegung als *Polkurvenpaar*; hiebei haben wir uns ein Abrollen der beweglichen Polkurve $\{ \mathfrak{p} \}$ (Lage im Ursoma) auf der festen Polkurve $\{ \mathfrak{P} \}$ vorzustellen, wenn die Kugelschale der zweiten Bildpunkte sich gegenüber der ersten bewegt. — Die beiden Polkurven schrumpfen für den Fall einer kontinuierlichen Drehung der Bildkugel (um den Punkt $\mathfrak{P}$) auf das Bildpunktepaar $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P})$ zusammen, d. h. die Bildkurve k ist die Gerade $\mathfrak{P}$.

Im allgemeinen erhalten wir als Bild einer zweiparametrigen stetigen Somenmannigfaltigkeit im Punktraum eine „*Fläche des Zwanges*": Die freie infinitesimale Beweglichkeit der beiden Bildkugelschalen kann hiebei durch eine einzige Bedingung eingeschränkt gedacht werden. So bewirkt etwa das Anbringen einer „Klammer", die den Punkt $\mathfrak{a}$ der festen Kugel $\varkappa$ mit dem benachbarten Punkt $\mathfrak{A}$ der beweglichen Kugelschale K fest verbindet, daß $\mathfrak{A}$ nur auf einem Kreis um $\mathfrak{a}$ wandern, K hingegen sich noch um diesen Punkt $\mathfrak{A}$ drehen kann. Die Bildpunktepaare $(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ gehören somit einem Komplex gleicher Spanne an und bestimmen wegen $\mathfrak{a} = \text{konst.}$ ∞^1 parallele Tangenten einer Kugel um den Ursprung. Die Drehungen von K um die einzelnen Lagen von $\mathfrak{A}$

lassen aber den das Soma K abbildenden Raumpunkt jeweils eine dieser parallelen Geraden durchlaufen. *Die Fläche des Zwanges einer sphärischen infinitesimalen Einklammerbewegung ist daher ein Drehzylinder, dessen Achse durch den Ursprung geht.*

Schränken zwei solche infinitesimale Klammern die Beweglichkeit der beiden Kugelschalen ein, betrachten wir also ein *Gelenkviereck*, so erhalten wir das Bild der einparametrigen Somenmannigfaltigkeit (Lagenfolge der „Koppel") als Schnitt der Bilder der beiden zugehörigen Einklammerbewegungen. Da diese Flächen des Zwanges Drehzylinder mit sich im Ursprung schneidenden Achsen sind, ergibt sich als *Bild der sphärischen infinitesimalen Zweiklammerbewegung eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art*, die bezüglich 0 symmetrisch liegt. Gleiche Länge der „Arme" des Gelenkvierecks bedingt den Zerfall dieser Kurve in zwei Ellipsen.

19.

Der Darstellung der Euklidischen Bewegungen des Linienraumes in Abschnitt 1 liegen im Wesentlichen die *Study*schen Bewegungszeiger zugrunde. Wir brauchen nur die duale genormte Quaternion (also eigentlich die genormte Biquaternion)

$$Q = \mathfrak{P}^{\frac{\Theta}{\pi}} = \cos\frac{\Theta}{2} + \mathfrak{P}\sin\frac{\Theta}{2} =$$

$$= (\cos\frac{\vartheta}{2} - \frac{\varepsilon\bar{\vartheta}}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}) + \mathfrak{p}\sin\frac{\vartheta}{2} + \varepsilon\,(\bar{\mathfrak{p}}\sin\frac{\vartheta}{2} + \frac{\bar{\vartheta}}{2}\mathfrak{p}\cos\frac{\vartheta}{2})$$

einzuführen, um die Formel (1) in der Gestalt

$$\mathfrak{A}^* = Q \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \hat{Q} \tag{8}$$

schreiben zu können. Hiebei sei durch das Multiplikationszeichen „Punkt" die Quaternionenmultiplikation und durch $\hat{Q}$ die zu Q konjugierte Quaternion angedeutet. Die Normierung besagt $Q \,.\, \hat{Q} = 1$. In Q sind nun die *Study*schen Bewegungsparameter zu einer Quaternion zusammengefaßt.

Die eine Schiebung darstellende Formel (2) wird aus (8) für $\vartheta = 0$, also für $Q = 1 + \varepsilon\frac{\bar{\vartheta}}{2}\mathfrak{p}$ erhalten.

In Abschnitt 5 bildeten wir die Punkte des Raumes als Träger von Strahlbündeln auf die infinitesimalen Drehungen der Bildkugel ab

und verliehen diesem Vorgehen durch Formel (3) Ausdruck. Mittels Quaternionen läßt sich dies auch so schreiben:

$$\mathfrak{A} = X \,.\, \mathfrak{a} \,.\, \hat{X} = (1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{x}) \,.\, \mathfrak{a} \,.\, (1 - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{x}).$$

Hiebei ist $\mathfrak{x} = \overline{\mathcal{P}}\,\mathfrak{p}$ der Ortsvektor des abgebildeten Raumpunktes und $X = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{x}$.

20.

Diese *Hamilton*sche Quaternionendarstellung der Drehungen läßt besonders deutlich den Gruppencharakter unserer kinematischen Abbildung hervortreten. *Die infinitesimalen Drehungen der Einheitskugel bilden eine dreigliedrige Transformationsgruppe, deren Parameterraum der dreidimensionale Euklidische Punktraum ist.* Wie man aus der Zusammensetzung zweier solcher Transformationen sofort sieht, ist *diese Gruppe kommutativ (Abel*sche *Gruppe) und besitzt die Schiebungsgruppe des Euklidischen Raumes als Parametergruppe.* Wir erhalten nämlich, wenn wir die zu den Raumpunkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gehörigen Transformationen X, Y hinter einander ausüben, die infinitesimale Drehung

$$X \,.\, Y = (1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{x}) \,.\, (1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{y}) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\,(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) =$$

$$= (1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{y}) \,.\, (1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{x}) = Y \,.\, X.$$

Natürlich gelangen wir hiezu auch direkt durch Substituieren nach Formel (3):

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,(\mathfrak{x} \times \mathfrak{a})$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \varepsilon\,(\mathfrak{y} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{a} + \varepsilon\,(\mathfrak{x} \times \mathfrak{a}) + \varepsilon\,(\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + \varepsilon\,(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \times \mathfrak{a}$$

Dem Zusammensetzen der infinitesimalen Drehungen der Bildkugel entspricht somit tatsächlich die Addition der Ortsvektoren der zugeordneten Bildpunkte im Parameterraum.

Die Entfernung zweier Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des Raumes kann somit (abgesehen vom Faktor ε) als Drehwinkel der Transformation XY^{-1} gedeutet werden.

Die infinitesimalen Drehungen der Einheitskugel, auf denen unsere kinematische Abbildung fußte, decken sich mit den infinitesimalen Grundtransformationen der endlichen kontinuierlichen Drehungsgruppe im Sinne von *S. Lie*, wenn die Drehachse jeweils fest bleibt.

Zur Auflösung von Gleichungssystemen*.

Von
Hans Hornich, Graz.

(Eingelangt am 5. Oktober 1949.)

Für die Auflösung eines Systems von Gleichungen werden gewöhnlich[1] die betreffenden Funktionen als differenzierbar vorausgesetzt und die Existenz der Lösung wird dann mit Verwendung der *Jacobi*schen Funktionaldeterminante gezeigt. Nun lassen sich aber die Umkehrungsfunktionen viel einfacher und allgemeiner bilden, wenn man ein Iterationsverfahren, wie es etwa bei den impliziten Funktionen einer Variablen gebraucht wird[2], verallgemeinert und auf mehrere Variable anwendet; dabei ergeben sich auch gleich die Schranken des Bereiches, in dem die Umkehrungsfunktionen definiert sind.

Wir operieren in einem linearen endlichdimensionalen Raum R, in dem jedem Punkt $\mathfrak{x}$ in der bekannten Art eine nichtnegative Zahl $|\mathfrak{x}|$ als Betrag zugeordnet ist. Eine Funktion in R, bzw. in einer Teilmenge M von R ordne jedem Punkt von M einen Punkt eines zweiten linearen Raumes R' von ebensovielen Dimensionen zu, in dem gleichfalls eine Betragsfunktion definiert sei. Eine Funktion $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$ in R heißt dabei linear, wenn für beliebige Punkte $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ stets $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}'')=\mathfrak{L}(\mathfrak{x}')+\mathfrak{L}(\mathfrak{x}'')$ und für eine reelle Zahl α stets $\mathfrak{L}(\alpha\,\mathfrak{x})=\alpha\,\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$ gilt; der Nullpunkt 0 von R gehe dabei also in den Nullpunkt von R' über. Ist für $\mathfrak{x}'\neq\mathfrak{x}''$ stets $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}')\neq\mathfrak{L}(\mathfrak{x}'')$, so gibt es zu $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})=\mathfrak{y}$ in R' die inverse Funktion, die wir mit $\mathfrak{x}=\mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{y})$ bezeichnen.

Sei eine Funktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ *in der Kugel* G *mit* $|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0|\leqq\varrho\ (\varrho>0)$ *definiert; es gebe eine lineare umkehrbare Funktion* $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$ *und eine reelle Zahl* q *mit* $0\leqq q<1$, *so daß für je zwei Punkte* $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ *aus* G *gilt*

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}')-\mathfrak{F}(\mathfrak{x}'')-\mathfrak{L}(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x}'')|\leqq q\,|\mathfrak{L}(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x}'')| \qquad (*)$$

Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathfrak{y}$ *aus* R' *mit*

---

* Herrn Geheimrat *O. Perron* zum 70. Geburtstag.

[1] Vgl. z. B. *Haupt-Aumann*, Differential- und Integralrechnung II, S. 137ff.

[2] *Goursat*, Cours d'analyse, I, S. 81f.

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0)| \leqq \varrho (1 - q) K$$

einen und nur einen Punkt $\mathfrak{x}$, *so daß* $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \varrho$ *und*

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}.$$

Dabei ist $K = \text{Min}\ |\mathfrak{L}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)|$ für alle $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| = 1$, also $K > 0$.

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt sofort aus (*); wäre $\mathfrak{y} = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}') = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'')$, so wäre ja $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') = 0$ und $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}''$.

Nun die Konstruktion der Lösung. Wir setzen für jedes ganze $n \geqq 0$

$$\mathfrak{x}_{n+1} = \mathfrak{x}_n + \mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{y} - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_n))$$

und zeigen, daß dann für alle $n > 0$ gilt:

$$\alpha)\ |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0)| \leqq \varrho (1 - q^n) K$$

$$\beta)\ |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_{n+1} - \mathfrak{x}_n) \leqq q\, |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_{n-1})|.$$

Aus (α) folgt dann

$$|\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0| \leqq \frac{1}{K} |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0)| \leqq \varrho (1 - q^n) \leqq \varrho,$$

so daß wir alle $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_n)$ bilden können.

Für $n = 1$ ist α) und β) richtig: denn es ist $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{y} - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0))$, also $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0) = \mathfrak{y} - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0)$ und $|\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)| \leqq \varrho (1 - q) K$. Weiter ist

$$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0) - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1)),$$

woraus nach (*) wieder β) für $n = 1$ folgt.

Seien nun α) und β) für alle Indices $\leqq n$ richtig. Dann ist

$$|\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_{n+1} - \mathfrak{x}_0)| \leqq |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_{n+1} - \mathfrak{x}_n)| + |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_{n-1})| + \ldots + |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)|$$

$$\leqq |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)| \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \leqq \varrho (1 - q^{n+1}) K,$$

also α) erfüllt und

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_{n+2} - \mathfrak{x}_{n+1}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{x}_{n+1} - \mathfrak{x}_n) + (\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_n) - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_{n+1})),$$

also nach (*) auch β) richtig für den Index $n + 1$.

Es konvergiert daher die Folge der $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_0)$, also auch die der $\mathfrak{x}_n$; sei etwa $\mathfrak{x}_n \longrightarrow \mathfrak{x}$, so ist $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \varrho$; aus (*) folgt wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{L}$ auch die von $\mathfrak{F}$ und es ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}$.

Die Punktmenge G' von R', auf die durch $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ die Kugel G abgebildet wird, enthält also eine Kugel vom Radius $\varrho (1 - q) K$ um den Punkt $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0)$. Weiter ist nach (*)

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'')| \leqq (1 + q) K_1 |\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''|,$$

wo $K_1 = \text{Max} \mid \mathfrak{L}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \mid$ für $\mid \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 \mid = 1$; also ist G' eingeschlossen von einer Kugel vom Radius $\varrho(1+q)K_1$ um den Punkt $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0)$.

Ist die Dimension von R, bzw. R' gleich N und stellt man die Punkte von R, bzw. R' durch je N linear unabhängige Punkte $\mathfrak{x}_i$, bzw. $\mathfrak{y}_i$ dar, so ist für jede lineare Funktion $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_i) = \sum_k A_{ik}\,\mathfrak{y}_k$ $(i, k = 1 \ldots N)$ und diese Funktion ist durch die N^2 willkürlichen Koeffizienten A_{ik} festgelegt. Wir denken uns die A_{ik} als Koordinaten eines Raumes von N^2 Dimensionen $\mathfrak{R}$; die umkehrbaren linearen Funktionen sind dann durch das Nichtverschwinden der Determinante $\mid A_{ik} \mid$ gegeben, stellen also eine in $\mathfrak{R}$ offene Menge dar. Wir bilden nun die Menge L aller linearer umkehrbarer Funktionen $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$, für welche bei unserer Funktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ in G mit irgendeinem $0 \leqq q < 1$ die Ungleichung (*) stets erfüllt ist.

Die Menge L ist *offen*. Sei $\mathfrak{L}$ eine Funktion aus L, so ist $\mathfrak{L}$ nicht $\equiv 0$, da ja $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ nicht $\equiv 0$ ist. Sei dann $\mathfrak{L}_1$ eine weitere lineare Funktion, für welche mit einem reellen η und $0 < 2\eta < 1 - q$ stets $\mid \mathfrak{L}_1(\mathfrak{x}) \mid \leqq \eta \mid \mathfrak{L}(\mathfrak{x}) \mid$ gelte. Setzt man in (*) statt $\mathfrak{L}$ nun $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1$, so wird die linke Seite höchstens um $\eta \mid \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') \mid$ vermehrt; setzt man statt q weiter $q_1 = \dfrac{q+\eta}{1-\eta}$, so ist $q_1 < 1$ und die rechte Seite von (*) wird vermehrt um

$$\mid \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') + \mathfrak{L}_1(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') \mid \frac{q+\eta}{1-\eta} - \mid \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') \mid \cdot\, q \geqq \eta \mid \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') \mid$$

die Ungleichung bleibt also richtig. Die Menge aller dieser Funktionen $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1$ bildet eine Umgebung von $\mathfrak{L}$; für hinreichend kleine η ist ferner auch $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1$ umkehrbar, also gehört eine Umgebung von $\mathfrak{L}$ zu L und L ist offen.

Mit jeder linearen Funktion $\mathfrak{L}$ gehören auch alle Funktionen $\sigma\,\mathfrak{L}$ mit $\sigma > 1$ zu L. Das ist wie oben sofort gezeigt, wenn wir nur statt q nun $q_1 = \dfrac{q + \sigma - 1}{\sigma}$ nehmen.

Die Menge L ist *konvex*.

Seien $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ zwei Funktionen aus L, die mit den Konstanten q_1, q_2 die Ungleichung (*) erfüllen; denn liegen mit $q = \text{Max}(q_1, q_2)$ und festgehaltenen $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ die $\mathfrak{L}_i(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')$ in der Kugel

$$\mid \mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'') - \mathfrak{z} \mid \leqq q \cdot \mid \mathfrak{z} \mid,$$

also auch die sämtlichen $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \sigma(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)$ mit $0 \leqq \sigma \leqq 1$.

Zu jedem $\mathfrak{L}$ aus L gibt es eine kleinste Zahl q, für die (*) erfüllt ist; diese nennen wir $q(\mathfrak{L})$ und bilden für alle $\mathfrak{L}$ aus L

$$\inf q(\mathfrak{L}) = Q.$$

Es gibt lineare Funktionen $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$, so daß $q(\mathfrak{L}) = Q$ ist.

Wir nehmen eine Folge $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ mit $\lim q(\mathfrak{L}_n) = Q$. Ist $Q < Q' < 1$, so ist für fast alle n $q(\mathfrak{L}_n) \leqq Q'$ und für alle $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}_n(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| \leqq Q' |\mathfrak{L}_n(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')|;$$

bei festgehaltenen $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ liegen die $\mathfrak{L}_n(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')$ im Innern einer Kugel, haben also Häufungspunkte. Ist N die Dimension von R, so nehmen wir N linear unabhängige $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''$ und es gibt eine Teilfolge, etwa $n_1, n_2, \ldots$, so daß $\mathfrak{L}_{n_j}$ für jeden dieser N Punkte und damit für ganz R konvergiert. Setzen wir $\lim \mathfrak{L}_{n_j}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{x})$, so gilt stets

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| \leqq Q |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')|;$$

schließlich ist für verschiedene $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ auch $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') \neq 0$, weil sonst auch $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'')$ wäre, entgegen den anfangs Gesagten; also ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$ umkehrbar und $\mathfrak{L}$ in L gelegen.

Ist $Q = 0$, so ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{L}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)$, also eine lineare Funktion.

Bisher wurde stets im Bereich G mit $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \varrho$ operiert. Wir stellen nun dieselben Untersuchungen für jeden Bereich G_τ mit $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \tau \leqq \varrho$ an. Eine lineare Funktion, die (*) in G mit der Konstante q erfüllt, erfüllt diese auch in G_τ. Wir bilden für jede solche lineare Funktion $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$ analog wie oben den kleinsten Wert q, für den (*) in G_τ erfüllt ist; er sei $q_\tau(\mathfrak{L})$ und es ist $q_\tau(\mathfrak{L}) \leqq q(\mathfrak{L})$. Analog sei wieder $\inf q_\tau(\mathfrak{L}) = Q_\tau$ und es ist $Q_\tau \leqq Q_{\tau'}$ für $\tau \leqq \tau'$. Es existiert also $\lim_{\tau \to 0} Q_\tau = Q_0$.

Bilden wir zu jedem G_τ, bzw. Q_τ die linearen Funktionen $\mathfrak{L}_\tau$ mit $q_\tau(\mathfrak{L}_\tau) = Q_\tau$, so sind diese in G gleichmäßig beschränkt; denn es ist in G_τ

$$|\mathfrak{L}_\tau(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| \leqq \frac{|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'')|}{1 - Q_\tau}$$

und in $G = G_\varrho$

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'')| \leqq (1 + Q) |\mathfrak{L}_\varrho(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')|,$$

also in G_τ und wegen der Linearität überall in G

$$|\mathfrak{L}_\tau(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| \leqq \frac{1 + Q}{1 - Q_\tau} |\mathfrak{L}_\varrho(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')|.$$

Es gibt daher konvergente Teilfolgen der $\mathfrak{L}_\tau$, etwa $\lim_{\tau_n \to 0} \mathfrak{L}_{\tau_n}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{x})$.

In G_{τ_n} gilt nun

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}_{\tau_n}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| \leqq Q_{\tau_n} |\mathfrak{L}_{\tau_n}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')|$$

also auch

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| \leqq$$
$$\leqq Q_{\tau_n} |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| + (1 + Q_{\tau_n}) |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}_{\tau_n}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')|.$$

Ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$ umkehrbar, so ist mit jedem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes n

$$|\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}_{\tau_n}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| < \varepsilon |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')|,$$

und es erfüllt die Funktion $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$, *für jeden hinreichend kleinen Bereich* G_τ *die Ungleichung* (*) *mit einer beliebig wenig von* Q_0 *verschiedenen Konstante.*

Diese Funktionen liefern dann die Iterationsverfahren zum Umkehrproblem $\mathfrak{y} = \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ mit der besten Konvergenz.

Ist $Q_0 = 0$, *so ist* $|\mathfrak{L}_{\tau_n}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| < \eta |\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''|$ *für jedes* $\eta > 0$ *bei hinreichend großem* n *und daher*

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}'') - \mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| \leqq Q_{\tau_n} |\mathfrak{L}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'')| + 2\eta |\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''|,$$

also ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ *in* $\mathfrak{x}_0$ *differenzierbar und die dazugehörige lineare Funktion* $\mathfrak{L}(\mathfrak{x})$ *eindeutig, nämlich das Differential von* $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ *in* $\mathfrak{x}_0$.

Dies ergibt sich dann unmittelbar aus der Definition eines Differentials.

Seien im einfachsten Fall R und R' eindimensional und die Funktion $\mathfrak{f}(x)$ stetig differenzierbar Im Punkt x_0 sei $\mathfrak{f}(x_0) \neq 0$ und $\mathfrak{f}'(x_0) \neq 0$. Wir suchen ein x mit $\mathfrak{f}(x) = 0$. Gibt es drei Zahlen $c \neq 0$, $\varrho > 0$ und $0 \leqq q < 1$, so daß

$$|\mathfrak{f}'(x) - c| \leqq q |c| \text{ für } |x - x_0| \leqq \varrho$$

(welche Ungleichung natürlich auch (*) liefert) und

$$|\mathfrak{f}(x_0)| \leqq \varrho (1 - q) |c|,$$

so ist das Iterationsverfahren mit $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\mathfrak{f}(x_n)}{c}$ konvergent und liefert den Wert $x = \lim x_n$ mit $\mathfrak{f}(x) = 0$. Die Konvergenz ist nach dem obigen am günstigsten für $c = \mathfrak{f}'(x_0)$.[1]

[1] Diese Variante des *Newton*schen Verfahrens hat *Ostrowski* untersucht. (Gedenkwerk *D. A. Gravè*, Moskau 1940.)

Über einen Satz von Hardy und Littlewood.

Von
Leopold Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 12. Oktober 1949.)

Hardy und *Littlewood*[1] haben folgenden interessanten Satz bewiesen:

Satz 1: Sei s_n die n-te Partialsumme der Fourierreihe einer Cauchy-Lebesgue-integrierbaren[2], periodischen Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0. Die Fourierreihe (F.R.) sei in x_0 konvergent gegen s und es gelte

$$s_n - s = o\left(\frac{1}{\log n}\right) \tag{1}$$

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} = 0(t^{-\gamma}) \quad \gamma > 1. \tag{2}$$

Dann gilt

$$\sum_0^\infty A_k \frac{\sin kt}{kt} = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(x)\,dx \longrightarrow s \text{ für } t \longrightarrow 0$$

$A_k = a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0$, a_k, b_k die F. Koeffizienten von $f(x)$.

Diesem Satz kann man nun einen anderen zur Seite stellen, welcher (1) durch eine Summierbarkeitsbedingung ersetzt, wie dies durch eine Reihe von Sätzen, welche der Verfasser kürzlich an anderer Stelle[3] veröffentlicht hat, nahegelegt wird. Unter Beschränkung auf die $C1$-Mittel und bei zu Grundelegung der üblichen Vereinfachungen kann er so formuliert werden:

---

[1] *Hardy G. H.* and *Littlewood J. E.*: Some new convergence criteria for Fourier series, Annali Sc. Norm. Super. Pisa, Ser. II, Vol. III (1934), S. 58ff.

[2] Damit ist gemeint, daß f in jedem Intervall, das x_0 nicht enthält, L-integrierbar ist, jedoch

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0+\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx \text{ vorhanden ist.}$$

[3] *Schmetterer L.*, Taubersche Sätze und Trigonometrische Reihen. Soll demnächst in den Sitzungsberichten der österr. Akademie der Wissenschaften erscheinen.

Satz 2: Sei σ_n das n-te $C1$-Mittel der F.R. einer Cauchy-Lebesgue-integrierbaren periodischen und geraden Funktion $\varphi(x)$ an der Stelle $x = 0$. Gilt

$$\sigma_n = o(n^{-\alpha}) \tag{3}$$

$$\varphi(t) = 0(t^{-\gamma}) \tag{4}$$

und

$$\frac{1}{1-\alpha} > 2\gamma \quad (\gamma > 1{,}0 < \alpha < 1), \tag{5}$$

dann hat man

$$\sum_1^\infty a_k \frac{\sin kt}{kt} = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi\, dx = o(1) \qquad \left(a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cos kx\, dx\right) \tag{6}$$

Der Beweis dieses Satzes läßt sich ohne Schwierigkeiten führen, wenn man den Satz 1 hat und soll hier nicht dargestellt werden, da wir einen weiteren Satz beweisen, der Satz 2 beinhaltet. Es soll nämlich gezeigt werden, daß sich (5) verschärfen läßt. Es gilt der

Satz 3: Mit den Bezeichnungen von Satz 2 gelte

$$\sigma_n = 0(n^{-\alpha}) \tag{7}$$

sowie (4), wobei α und γ durch

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} > \gamma \qquad (\gamma > 1, \alpha < 1) \tag{8}$$

verknüpft sind.

Dann gilt (6).

Wir schicken dem Beweis einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1: Es ist

$$\frac{\sin kt}{k} - 2\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k+2)t}{k+2} = 0\left(\frac{t^2}{k}\right) \tag{9}$$

und

$$\frac{\sin kt}{k} - \frac{\sin(k+1)t}{k+1} = 0\left(\frac{t}{k}\right) \tag{10}$$

Die Beweise sind leicht und bekannt.

Hilfssatz 2: Es ist

$$Z_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} \frac{\sin kt}{k} = 0(1) \text{ gleichmäßig in } t, n, m, \tag{11}$$

$$Z_{m,n} = 0\left(\frac{1}{mt}\right) \text{ gleichmäßig in } n,\ 0 < |t| < \pi \tag{12}$$

und

$$Z'_{m,n} = 0\left(\frac{1}{t}\right) \text{ gleichmäßig in } n, m,\ 0 < |t| < \pi. \tag{13}$$

Die bekannten Beweise sind leicht zu führen.

Hilfssatz 3: Aus den Voraussetzungen des Satzes 3 folgt

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(x)\,dx = o\left(t^{\varepsilon^l - 1}\right), \text{ wenn}$$

$$\Phi(t) = o\left(t^{\varepsilon^{l-1}-1}\right) \tag{14}$$

schon bekannt ist, für ein $\varepsilon > 1$ und alle natürlichen $l \geqq 2$, solange $\varepsilon^l \leqq 2$.

Beweis: Sei $S_n = n\,\sigma_n$.

Wegen (14) hat man

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\nu-2} S_k \left(\frac{\sin kt}{k} - 2\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k+2)t}{k+2}\right) +$$

$$+ S_{\nu-1}\left(\frac{\sin(\nu-1)t}{\nu-1} - \frac{\sin \nu t}{\nu}\right) + s_\nu \frac{\sin \nu t}{\nu} + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} a_k \frac{\sin kt}{k}, \text{ also wegen}$$

$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi \cos kx\,dx$, (7), Hilfssatz 1 (9) und (10)

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\nu-2} 0\left(k^{1-\alpha}\right) 0\left(\frac{t^2}{k}\right) + 0\left((\nu-1)^{1-\alpha}\right) 0\left(\frac{t}{\nu-1}\right) +$$

$$+ 0\left(\nu^{1-\alpha}\right) 0\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{2}{k}\sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{\sin kt}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi \cos kx\,dx$$

Sei nun

$$\nu = \left[\frac{1}{t^r}\right] \tag{16}$$

mit

$$\frac{1}{1-\alpha} > r > \gamma + 1,$$

welche Wahl von r wegen (8) möglich ist.

Wir schreiben

$\Phi(t) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}$ und erhalten:

$\mathrm{I} = t^2\, 0(\nu^{1-\alpha}) = t^2\, 0(t^{-r(1-\alpha)}) = o(t)$ wegen (15) und (16).

$\mathrm{II} = 0(t(\nu-1)^{-\alpha}) = 0(t^{1+r\alpha}) = o(t)$.

$\mathrm{III} = 0(\nu^{-\alpha}) = 0(t^{r\alpha}) = o(t)$, da aus (16) folgt $r\alpha > r-1 > 1$.

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to 0} Z_{m,n} = Z_m$, wählen

$$\varepsilon = \frac{r}{\gamma+1} > 1 \tag{17}$$

und erhalten für IV:

$$\mathrm{IV} = 0\left\{\sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{\sin k t}{k} \int_0^{t^\varepsilon} \varphi \cos kx\, dx + \tfrac{1}{2}\Big[\int_{t^\varepsilon}^{t-t^r} \varphi\, Z_{\nu+1}(t-x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{t-t^r}^{t+t^r} \varphi\, Z_{\nu+1}(t-x)dx + \int_{t+t^r}^{\pi} \varphi\, Z_{\nu+1}(t-x)dx + \int_{t^\varepsilon}^{\pi} \varphi_{\nu+1} Z_{\nu+1}(t+x)dx\Big]\right\} =$$

$$= 0(\mathrm{IV}_1 + \mathrm{IV}_2 + \mathrm{IV}_3 + \mathrm{IV}_4 + \mathrm{IV}_5).$$

Es ist $\mathrm{IV}_1 = \tfrac{1}{2} \lim\limits_{n=\infty} \Big(\int_0^{t^\varepsilon} \varphi\, Z_{\nu+1,n}(t-x)\, dx + \int_0^{t^\varepsilon} \varphi\, Z_{\nu+1,n}(t+x)\, dx\Big)$

Wir behandeln nur den 1. Summanden. Für den 2. ist alles analog.

$$\int_0^{t^\varepsilon} \varphi\, Z_{\nu+1,n}(t-x)dx = \Phi Z_{\nu+1,n}\Big|_0^{t^\varepsilon} - \int_0^{t^\varepsilon} \Phi \frac{d}{dx} Z_{\nu+1,n}(t-x)\, dx =$$

$$= o\Big(\frac{1}{\nu(t-t^\varepsilon)}\, t^{\varepsilon^{l-1}-1}\Big) + o\Big(\frac{1}{t-t^\varepsilon} \int_0^{t^\varepsilon} x^{\varepsilon^{l-1}-1}\, dx\Big) = o(t) + o\Big(\frac{1}{t}\, t^{\varepsilon^l}\Big) =$$

$= o(t^{\varepsilon^l-1})$, gleichmäßig in n wegen Hilfssatz 2 (12), (13) und (14). Somit gilt dies auch für IV_1.

$\mathrm{IV}_2 = 0\Big(\frac{1}{\nu} \int_{t^\varepsilon}^{t-t^r} \frac{x^{-\gamma}}{t-x}\, dx\Big)$ wegen (4) und (12), also

$$\mathrm{IV}_2 = 0\Big(\frac{1}{\nu}\, t^{\varepsilon(-\gamma+[\gamma])} \int_{t^\varepsilon}^{t-t^r} \frac{x^{-[\gamma]}}{t-x}\, dx\Big) =$$

$$= 0\Big(\frac{1}{\nu}\, t^{\varepsilon(-\gamma+[\gamma])} \cdot \frac{1}{t} \log\frac{1}{t} \cdot t^{-\varepsilon([\gamma]-1)}\Big),$$

wie man etwa durch Ausrechnen des Integrales erkennt.

$$\mathrm{IV}_2 = 0\,(t^{\frac{r-\gamma-1+r}{\gamma+1}} \log \frac{1}{t}) = o\,(t) \text{ wegen (16) und (17).}$$

$$\mathrm{IV}_3 = 0\,(\int_{t-t^r}^{t+t^r} x^{-\gamma}\,dx) = (t^{r-\gamma}) = o\,(t) \text{ wegen Hilfssatz 2 (11) und (16).}$$

$$\mathrm{IV}_4 = 0\,(t^{r-\gamma} \log \frac{1}{t}) = o\,(t) \text{ wegen (12) und (16).}$$

$\mathrm{IV}_5 = o\,(t)$ wie man ähnlich wie bei IV_2 erkennt.

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes 3 beendet.

Beweis des Satzes 3:

Die Konvergenz der F.R. von $\Phi\,(t)$ ist zunächst nicht gesichert, da Φ in der Umgebung der Stelle $t = 0$ nur als stetig vorausgesetzt werden kann. Sie wird sich im folgenden ergeben und gleichzeitig zeigen wir $\Phi\,(t) = o\,(t^{\varepsilon-1})$, wobei ε gemäß (17) definiert ist. Dann ist aber durch $\left[\frac{\log 2}{\log \varepsilon}\right] +$ 1-malige Anwendung des Hilfssatzes 3 alles bewiesen.

Wir zerlegen $\sum_1^\infty a_k \frac{\sin k\,t}{k}$ wie beim Beweis des Hilfssatzes 3 und bemerken, daß die dortigen Abschätzungen von (14) unabhängig sind, sofern sie sich nicht auf IV_1 beziehen. Sie können also unter den Voraussetzungen des Satzes 3 als gültig angenommen werden, da es zusammen mit der hier gegebenen Abschätzung von IV_1 verständlich ist, daß um $t = 0$ die Konvergenz der F.R. von Φ gesichert ist. (Der Reihenrest kann ja beliebig klein gemacht werden.)

Wir beschränken uns wieder auf die Betrachtung von

$$\lim_{n\to 0} \int_0^{t^\varepsilon} \varphi\, Z_{\nu+1,\,n}\ (t-x)\,dx.$$

Es ist $\int_0^{t^\varepsilon} \varphi Z_{\nu+1,\,n}\ (t-x)\,dx = \Phi Z_{\nu+1,\,n}\Big|_0^{t^\varepsilon} - \int_0^{t^\varepsilon} \Phi \frac{d}{dx}\ Z_{\nu+1,\,n}\ (t-x)\,dx =$

$$= o\,(\frac{1}{\nu\,(t-t^\varepsilon)}) + o\,(\frac{1}{t-t^\varepsilon} \int_0^{t^\varepsilon} dx) = o\,(t) + o\,(t^{\varepsilon-1}) = o\,(t^{\varepsilon-1}) \text{ wegen}$$

$\Phi\,(t) = o\,(1)$ w.z.b.w.

Eine einfache Fläche achter Ordnung.

Von
Fritz Hohenberg, Graz.

Mit 5 Abbildungen.

(Eingelangt am 17. November 1949.)

Wir betrachten die Fläche Φ, deren Punkte von drei gegebenen Punkten F_i Abstände d_i haben, für die

$$\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3 = 3\,a \text{ (const.)} \tag{1}$$

ist. Φ zeigt Analogien zu den Mittelpunktskegelschnitten, für die $\pm d_1 \pm d_2 = \text{const.}$ ist. Da der absolute Kegelschnitt doppelte Rückkehrkante von Φ ist, treten auch Analogien zu den Zykliden auf. Außerdem steht Φ in einfacher Beziehung zur *Steiner*schen Fläche 4. Ordnung.

Vorzugsweise wird der Fall besprochen, in dem die Punkte F_i ein gleichseitiges Dreieck bilden.

1. Erste Gleichungsform.

In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem bedeute $P\,(x, y, z)$ einen Flächenpunkt. Die „*Brennpunkte*" $F_i\,(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ können zunächst ein beliebiges Dreieck bilden. Dann ist $d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$.

Durch dreimaliges Quadrieren folgt aus (1) die Flächengleichung

$$[\,(\Delta_1 - 9\,a^2)^2 - 4\,\Delta_2]^2 - 576\,a^2\,\Delta_3 = 0, \tag{2}$$

wo $\Delta_1 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, $\Delta_2 = d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2$, $\Delta_3 = d_1^2 d_2^2 d_3^2$ ist.

Φ ist eine Fläche 8. Ordnung und enthält vierfachzählend den absoluten Kegelschnitt. Für $a = 0$ ergibt sich die doppelgezählte Zyklide $\Delta_1^2 - 4\,\Delta_2 = 0$[1].

[1] *G. Darboux*, Sur une classe remarquable ... (Paris 1873), erwähnt in einer Fußnote S. 47, daß die Fläche $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = 0$ (λ_i konstant) eine Zyklide ist. Siehe auch Enzyklopädie d. math. Wiss. III, AB 7 (*E. Müller*, Die verschiedenen Koordinatensysteme), S. 689, Anm. 355.

Wir beschränken uns nun i. a. auf einen übersichtlichen *Sonderfall*, der bereits alle wesentlichen Merkmale des allgemeinen Falles aufweist. Die Brennpunkte F_i sollen das gleichseitige Dreieck

$$F_1(e, 0, 0), \quad F_2\left(-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\sqrt{3}, 0\right), \quad F_3\left(-\frac{e}{2}, -\frac{e}{2}\sqrt{3}, 0\right) \tag{3}$$

bilden (Umkreisradius e, Mittelpunkt $U(0, 0, 0)$, „Achse" u $(x = y = 0)$). Mit den Abkürzungen

$$9a^2 - e^2 = b^2,\ x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = R^2,\ x^2 + y^2 = r^2,\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi \tag{4}$$

erhält Φ wegen $x(x^2 - 3y^2) = r^3 \cos 3\varphi$ die Gleichung

$$(R^4 - 4e^2r^2)^2 + 8a^2(R^6 - 12e^2r^2R^2 + 16e^3r^3\cos 3\varphi) = 0. \tag{5}$$

Φ hat vier Symmetrieebenen, nämlich $\sigma = [F_1F_2F_3]$ und $\sigma_i = [uF_i]$, d. h.

$$\sigma(z = 0),\ \sigma_1(y = 0),\ \sigma_2(y = -\sqrt{3}\,x),\ \sigma_3(y = \sqrt{3}\,x).$$

2. Die mehrfachen Kurven und Punkte der Fläche.

a) *Der absolute Kegelschnitt.* Führt man in der durch u gehenden Ebene ε ($\varphi = \text{const.}$) Minimalkoordinaten $\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 = 1 : (r + iz) : (r - iz)$ ein, so daß $\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 = 0 : 0 : 1$ der eine Kreispunkt $\mathfrak{J}_\varphi$ von ε ist, so liefert (5)

$$(e\zeta_0 + \zeta_1)^2 (e\zeta_0 - \zeta_1)^2 \zeta_2^4 + 4a^2\zeta_0^2 (4e^3 \cos 3\varphi . \zeta_0^3 + 3e^2\zeta_0^2\zeta_1 - 7\zeta_1^3)\zeta_2^3 + \\ + (\ldots)\zeta_2^2 + (\ldots)\zeta_2 + (\ldots) = 0.$$

Der Schnitt von Φ mit ε hat daher in $\mathfrak{J}_\varphi$ eine aus zwei linearen Zweigen (gewöhnlichen Spitzen) bestehende Singularität mit den Spitzentangenten $e\zeta_0 \pm \zeta_1 = 0$, d. h. *der absolute Kegelschnitt ist doppelte Rückkehrkante (Kuspidalkurve) von Φ und die asymptotische Torse besteht aus den konjugiert komplexen Minimalkegeln, die durch den Umkreis f von $F_1F_2F_3$ gehen.* Deren Spitzen sind $F(0, 0, ei)$ und $\bar{F}(0, 0, -ei)$.

Diese Minimalkegel berühren sich in den Kreispunkten $\mathfrak{J}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ von σ, für die $\varphi = \infty$ wird. Daher wird man in σ Minimalkoordinaten $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 = 1 : (x + iy) : (x - iy)$ einführen, so daß $\mathfrak{J}$ durch $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 = 0 : 0 : 1$ gegeben ist und die Schnittkurve s von Φ mit σ

$$\xi_1^4\xi_2^4 + 4\xi_0^2[16a^2e^3\xi_0^3 + (7a^2 + e^2)\xi_1^3]\xi_2^3 + \ldots = 0$$

lautet. s hat in $\mathfrak{F}$ einen Rückkehrspitzpunkt[2] mit der Tangente $\xi_1 = x + i\,y = 0$, d. h. durch $\mathfrak{F}$ geht ein superlinearer Zweig mit vier Partialzweigen, der nach dem *Newton*schen Dreieck durch eine „erste Rückkehrspitzparabel" $64\,a^2 e^3 \xi_0^5 + \xi_1^4 \xi_2 = 0$ angenähert werden kann.

b) *Die Doppelkreise.* k_i sei der Kreis in σ_i, der die Mitte F_i und den Radius $3\,a$ hat. Für einen Punkt P_0 auf k_1 ist $d_1 - d_2 + d_3 = 3\,a$ und $d_1 + d_2 - d_3 = 3\,a$. In der Nähe von P_0 gibt es ∞^2 Punkte von Φ, für die ebenfalls $d_1 - d_2 + d_3 = 3\,a$ ist, nämlich je ein Schnittpunkt der Kugeln $(F_1, 3\,a + \delta_1)$, $(F_2, \overline{P_0 F_2} + \delta_1 + \delta_2)$, $(F_3, \overline{F_3 P_0} + \delta_2)$ (d. h. z. B. Kugel mit der Mitte F_1 und dem Radius $3\,a + \delta_1$, δ_1 und δ_2 beliebig). Ebenso gibt es in der Nähe von P_0 ∞^2 Punkte von Φ, für die $d_1 + d_2 - d_3 = 3\,a$ ist; sie sind Schnittpunkte der Kugeln $(F_1, 3a + \delta_1)$, $(F_2, \overline{P_0 F_2} + \delta_2)$, $(F_3, \overline{P_0 F_3} + \delta_1 + \delta_2)$. Durch k_1 gehen also zwei Mäntel Φ_2 und Φ_3 von Φ, für die $d_1 - d_2 + d_3 = 3a$, bzw. $d_1 + d_2 - d_3 = 3a$ ist. Die Kreise k_i sind Doppelkurven von Φ.

Φ besitzt also mindestens drei im Endlichen liegende Flächenmäntel, d. h. Ovale Φ_1 $(-d_1 + d_2 + d_3 = 3\,a)$, Φ_2 $(d_1 - d_2 + d_3 = 3\,a)$, Φ_3 $(d_1 + d_2 - d_3 = 3\,a)$.

Die Doppelkreise k_i schneiden sich in den *triplanaren dreifachen Punkten* $D_1\,(0, 0, b)$ und $D_2\,(0, 0, -b)$ auf u. Deren Tangentialebenen berühren je zwei Doppelkreise.

Wenn die Punkte F_i ein beliebiges Dreieck bilden, hat die Fläche ebenfalls i. a. Doppelkreise, z. B. den Schnittkreis der Kugel $(F_1, 3\,a)$ mit der Symmetrieebene der Strecke $F_2 F_3$. Die drei Doppelkreise schneiden sich in zwei zur Ebene $[F_1 F_2 F_3]$ symmetrischen triplanaren dreifachen Punkten der Fläche, in der Entfernung $3\,a$ von F_i.

3. Ebene Schnitte der Fläche.

Die Schnittkurve s_ε von Φ mit einer Ebene ε hat i. a. 1. in den Schnittpunkten mit den Doppelkreisen Doppelpunkte (die teilweise zusammenrücken können), und 2. in den Kreispunkten von ε je eine aus zwei gewöhnlichen Spitzen zusammengesetzte Singularität[3]. Ein ebener Schnitt von Φ hat also i. a. das Geschlecht 3.

[2] Vgl. z. B. *H. Wieleitner*, Algebraische Kurven (Göschen 1919), Bd. 1, S. 113.

[3] Die außerordentlichen Brennpunkte von s_ε sind die Laguerreschen Vertreter der Normalrisse von F und $\overline{F}$ auf ε.

Die ebenen Schnitte von Φ sind polyzomale Kurven[4]. Zum Beweis kann man neue kartesische Koordinaten x', y', z' einführen, wo ε die Gleichung $z' = 0$ hat.

4. Der Schnitt der Fläche mit σ.

Diese Schnittkurve s lautet wegen $z = 0$, $R^2 = r^2 - b^2$

$$[(r^2-b^2)^2-4e^2r^2]^2+8a^2\,[(r^2-b^2)^3-12e^2r^2(r^2-b^2)+16e^3r^3\cos 3\varphi]=0. \tag{6}$$

Die Schnittpunkte von σ mit den Doppelkreisen sind Doppelpunkte, die Kreispunkte $\mathfrak{J}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ von σ sind Rückkehrspitzpunkte von s. Da ein Rückkehrspitzpunkt 3 Doppelpunkten und 3 Spitzen äquivalent ist[5], hat s i. a. die Klasse 14. Von den 24 Wendetangenten sind höchstens 6 reell; von den 51 Doppeltangenten haben höchstens 9 reelle Berührungspunkte. U ist singulärer Brennpunkt von s; F_1, F_2, F_3 werden sich in 7. als einfache Brennpunkte erweisen.

Weitere Punkte und eine Tangentenkonstruktion siehe 7., bzw. 10.

5. Die Schnitte der Fläche mit den Ebenen σ_i.

σ_1 schneidet Φ im Doppelkreis k_1 und in einer Kurve 4. Ordnung s_1

$$z = \pm\sqrt{-(x+e)^2+5\,a^2\pm 4\,a\sqrt{a^2-ex}}. \tag{7}$$

s_1 hat in den Kreispunkten von σ_1 Spitzen, deren Tangenten durch $(-e, 0, 0)$ laufen. s_1 hat i. a. das Geschlecht 1 und die Klasse 6. Von den 8 Wendepunkten sind höchstens 2 reell. Die einzige Doppeltangente ist $x = \dfrac{a^2}{e}$; ihre Berührungspunkte $z = \pm\dfrac{1}{e}\sqrt{a^2e^2-(a^2-e^2)^2}$ sind reell, wenn $\dfrac{a}{e}$ zwischen $\sqrt{\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})}$ und $\sqrt{\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5})}$ liegt. s_1 schneidet u in D_1, D_2 (Tangenten $2\,e\,x \pm b\,z = 0$) und in den Punkten $E_1\,(0, 0, \sqrt{e^2-e^2})$ und $E_2\,(0, 0, -\sqrt{e^2-e^2})$ (horizontale Tangenten). Horizontale Tangenten haben ferner die Punkte

$$x = \frac{1}{2e}\,[a^2-2e^2\mp a\sqrt{a^2+4e^2}],$$

[4] Diese Kurven führte *A. Cayley* ein (Trans. R. Soc. Edinb. 25 (1868), S. 1–110). Die naheliegende Definition der polyzomalen Flächen scheint sich nicht vorzufinden.

[5] *H. Wieleitner*, l. c., Bd. 2, S. 44.

$$z = \pm \frac{1}{2e} \sqrt{2\,[12\,a^2 e^2 - a^4 \pm a\,(a^2 + 4\,e^2)\sqrt{a^2+4\,e^2}]}$$

(zwei reelle Punkte für das obere und zwei konjugiert komplexe Punkte für das untere Vorzeichen von $\sqrt{a^2 + 4\,e^2}$).

6. Gestalt der Fläche.

s_1 schneidet die x-Achse in den Punkten mit

$$x_{1,2} = -a - e \pm 2\sqrt{a\,(a+e)},\ x_{3,4} = a - e \pm 2\sqrt{a\,(a-e)}. \qquad (8)$$

Bei festem e und wachsendem a wachsen x_1 und x_3, x_2 und x_4 nehmen ab.

Wir unterscheiden mehrere Fälle. In den zugehörigen Abb. 1. bis 5. ist Φ im Normalriß auf σ und σ_1 dargestellt. Das vordere obere Viertel ist weggeschnitten. Die Schnitte mit σ und σ_1 wurden schraffiert. Die eingezeichneten Umrißkurven und anderen Kurven werden später besprochen.

1. $a = 0$. Φ zerfällt nach (5) in die doppelgezählten Minimalkegel durch den Umkreis f von $F_1 F_2 F_3$. Die Ovale Φ_1, Φ_2, Φ_3 sind auf die Bögen $F_2 F_3$, $F_3 F_1$, $F_1 F_2$ von f zusammengeschrumpft. Für jeden Punkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks ist daher die Summe der Abstände von den benachbarten Ecken gleich dem Abstand von der Gegenecke[6].

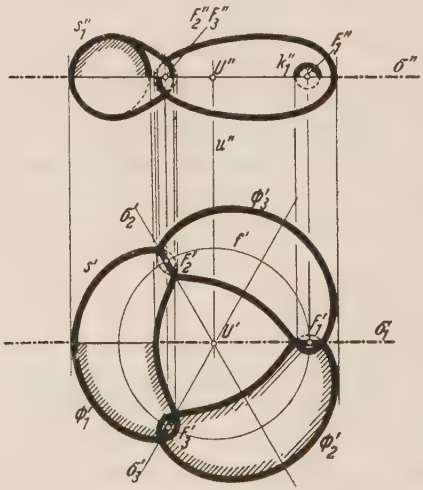

Abb. 1. $3\,a = \frac{e}{8}$.

2. $0 < 3\,a < e$ (Abb. 1, $3\,a = \frac{e}{8}$ gewählt). Hier ist $x_2 < x_1 < 0$, x_3 und x_4, D_1, D_2, E_1, E_2 sind komplex. $(x_1, 0, 0)$ und $(x_2, 0, 0)$ sind Scheitel von Φ_1. Die Ovale Φ_1, Φ_2, Φ_3 sind um je einen Teilbogen von f gelagert.

[6] Dies folgt auch aus dem Satz von Ptolemäus über das Sehnenviereck.

3. $3a = e$ (Abb. 2). Φ_1, Φ_2, Φ_3 haben den dreifachen Punkt $D_1 = D_2 = U$ gemein.

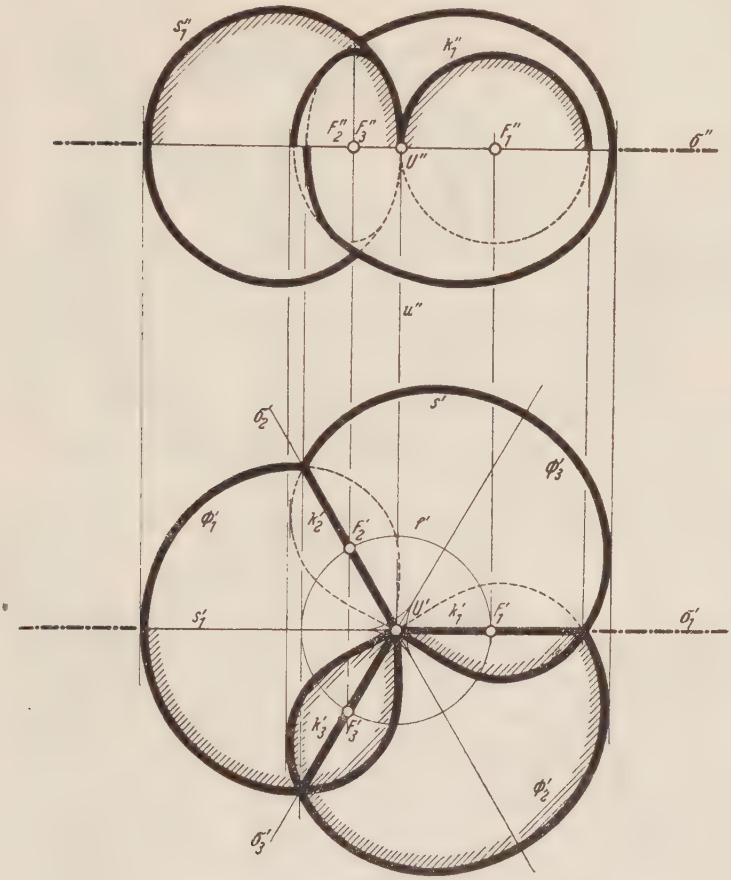

Abb. 2. $3a = e$.

4. $e < 3a < 3e$. D_1 und D_2 sind nunmehr reell getrennt.

5. $3a = 3e$ (Abb. 3). Außer den Ovalen Φ_1, Φ_2, Φ_3 enthält Φ wegen $\Sigma \overline{UF_i} = 3e = 3a$ den biplanaren isolierten Punkt U; dessen Tangentialebenen sind die Minimalebenen durch u.

6. $3e < 3a < 2e\sqrt{3}$. Φ_1, Φ_2, Φ_3 schwellen weiter an, aus U entwickelt sich ein Oval Φ_0, für dessen Punkte $d_1 + d_2 + d_3 = 3a$ ist. Φ_0 hat die Scheitel $(x_3, 0, 0)$ und $(x_4, 0, 0)$ und schneidet u in E_1 und E_2.

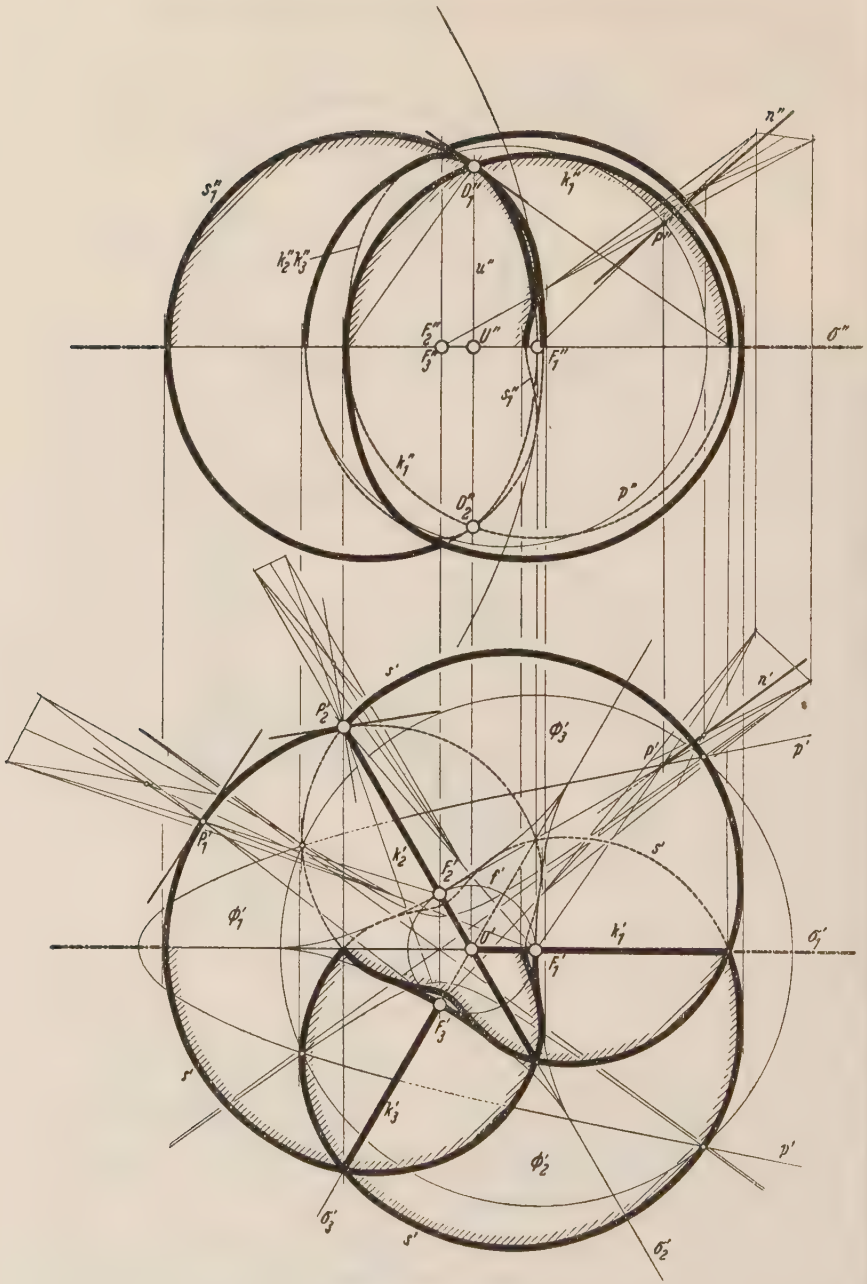
n''
s_1''
$0_1''$
k_1''
$k_2''k_3''$
u''
p''
f_2''
f_3''
U''
f_1''
σ''
s_1''
k_1''
$0_2''$
p''
s'
n'
ρ_2'
Φ_3'
p'
ρ_1''
k_2'
f_2'
f'
s'
Φ_1'
U'
k_1'
σ_1'
f_1'
f_3'
s'
k_3'
Φ_2'
p'
σ_3'
s'
σ_2'

Abb. 3 $a = 3\,e$.

7. $3a = 2e\sqrt{3}$ (Abb. 4). Zu diesem Sonderfall kommt man durch die Frage, wann Φ_0 und Φ_1 (reelle) Punkte gemein haben. Aus $d_1 + d_2 + d_3 = 3a$, $-d_1 + d_2 + d_3 = 3a$ folgt $d_1 = 0$; Φ geht also durch F_1 und ebenso durch F_2 und F_3, daher ist $3a = \overline{F_1F_2} + \overline{F_1F_3} = 2e\sqrt{3}$, $b = e\sqrt{11}$, $x_1 = x_3 = e$, $x_2 = (-3 - \frac{4}{3}\sqrt{3})\,e$ (auf Φ_1), $x_4 = (-3 + \frac{4}{3}\sqrt{3})\,e$ (auf Φ_0).

Φ hat in F_1 einen Doppelpunkt mit dem Tangentialkegel $2(x-e)^2 - y^2 - z^2 = 0$, analog in F_2 und F_3. s besitzt die Doppelpunkte F_i, ist also rational und von der 8. Klasse. Die im Innern von f gelegenen Bögen von s gehören Φ_0 an, die übrigen Bögen verteilen sich auf Φ_1, Φ_2 und Φ_3.

s_1 besitzt außer den Spitzen $\mathfrak{J}_1$ und $\bar{\mathfrak{J}}_1$ den Doppelpunkt F_1, ist also eine Pascalsche Schnecke. Die Punkte $(-\frac{5e}{3}, \pm\frac{8\sqrt{2}}{3}e, 0)$ von Φ_1 haben horizontale Tangentialebenen, ebenso die Punkte $E_1(0, 0, \frac{e}{\sqrt{3}})$ und $E_2(0, 0, -\frac{e}{\sqrt{3}})$ von Φ_0.

8. $3a > 2e\sqrt{3}$ (Abb. 5, $3a = 6e$ gewählt). $(x_1, 0, 0)$ und $(x_4, 0, 0)$ sind Scheitel von Φ_0, $(x_2, 0, 0)$ und $(x_3, 0, 0)$ Scheitel von Φ_1. Es ist jetzt $x_2 < x_4 < 0 < x_1 < x_3$.

Ordnet man (5) nach steigenden Potenzen von e,

$$(x_2 + y^2 + z^2 - a^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 9a^2)^3 - 4e^2(x^2 + y^2 + z^2 - 9a^2) \cdot [(x^2 + y^2 + 9a^2)^2 - (z^2 - 6a^2)^2 - 72a^4] + 128a^2e^3x(x^2 - 3y^2) + \ldots = 0,$$

so kann a bei festem e wachsen oder auch e bei festem a abnehmen, und man erkennt, daß sich Φ_0 für große a der Kugel (U, a) (Mitte U, Radius a), dagegen Φ_1, Φ_2, Φ_3 je der Kugel $(U, 3a)$ nähern.

7. Spezielle zyklische Raumkurven 4. Ordnung und parabolische Kreise auf der Fläche.

Die Kugel (F_1, ϱ) (Mitte F_1, Radius ϱ) und die Drehfläche 2. Grades $(F_2, F_3, 3a - \varrho)$ (Brennpunkte F_2 und F_3; Achsenlänge $\pm d_2 \pm d_3 = 3a - \varrho$) schneiden sich in einer auf Φ liegenden Raumkurve 4. Ordnung p.

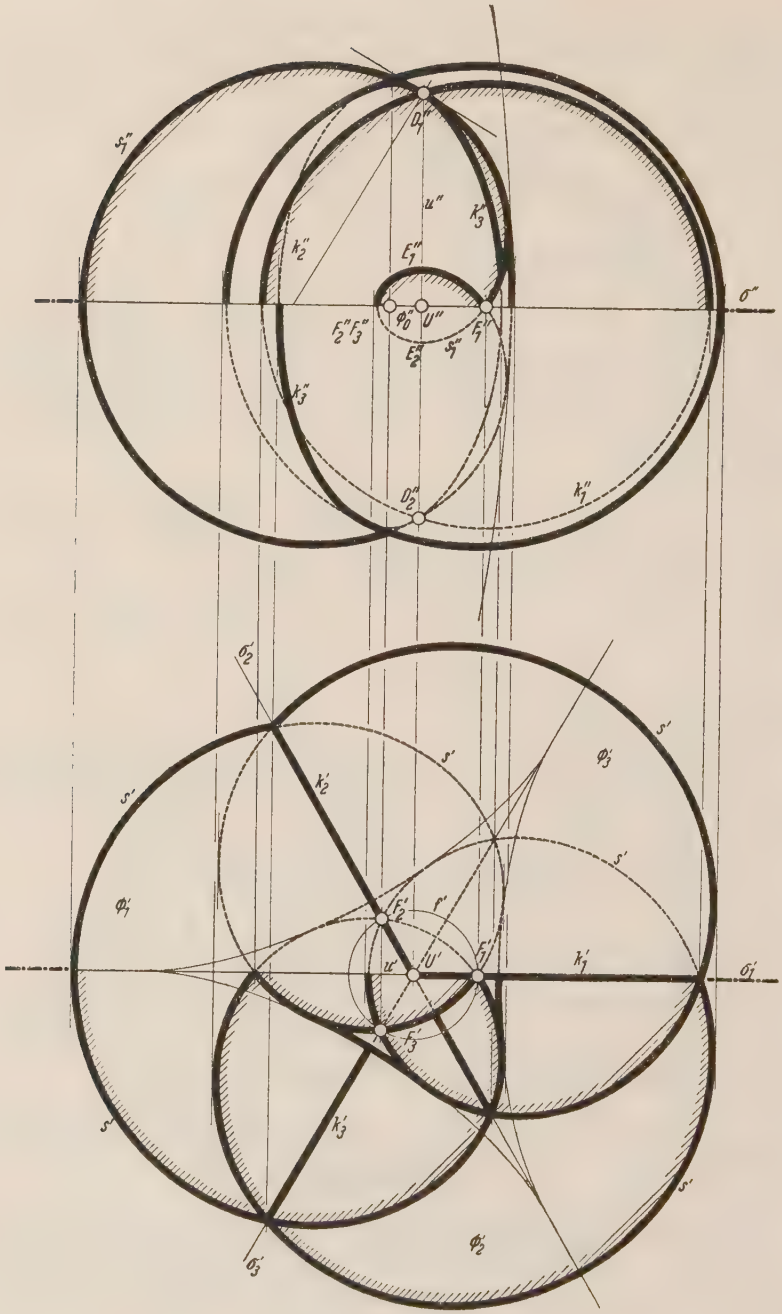

Abb. 4. $3\,a = 2\,e\sqrt{3}$.

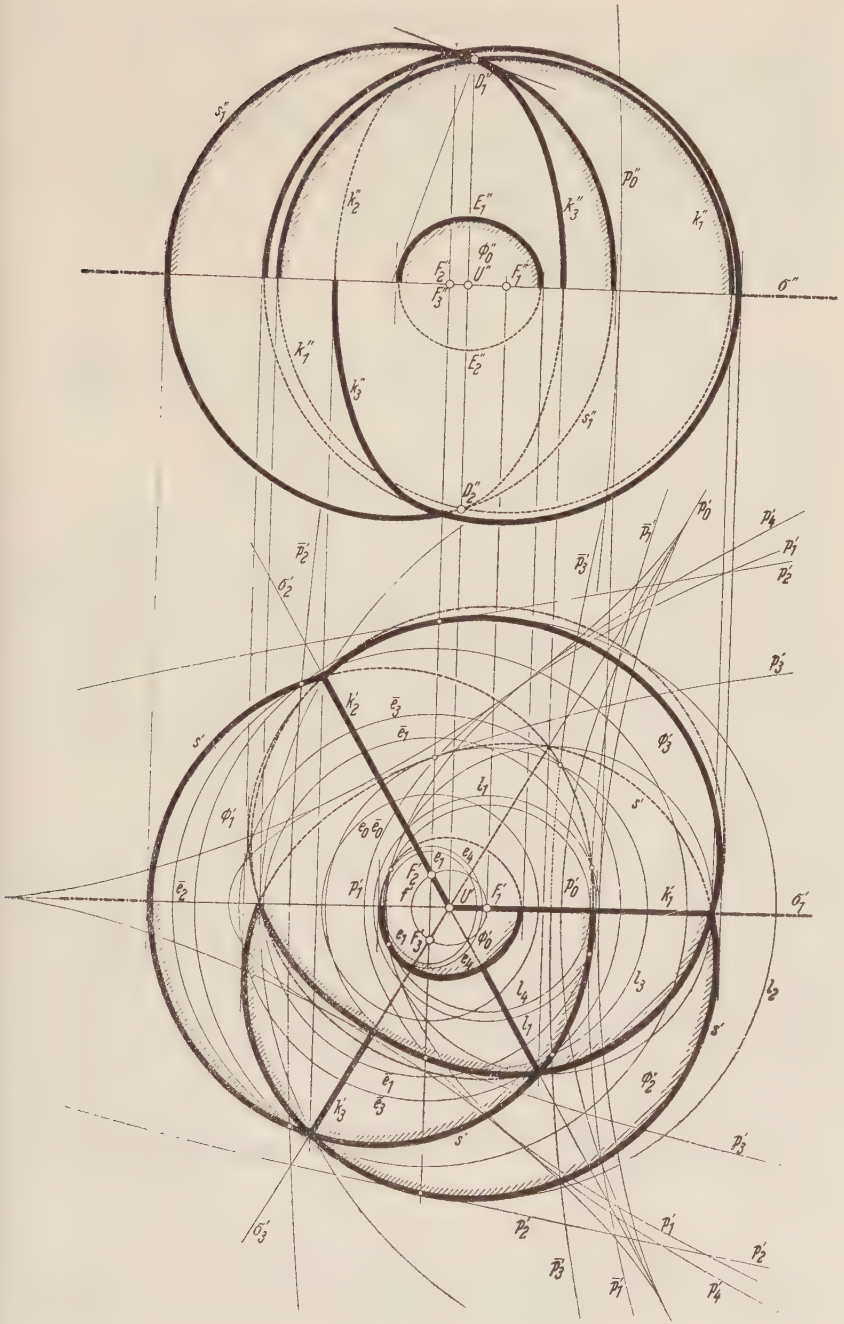

Abb. 5. $3\,a = 6^{\circ}e$.

$(F_2, F_3, 3a - \varrho)$ ist ein verlängertes Drehellipsoid oder zweischaliges Drehhyperboloid, je nachdem $3a - \varrho \gtrless \overline{F_2 F_3} = e\sqrt{3}$ ist. Ein Drehellipsoid ergibt wegen $d_2 + d_3 = 3a - \varrho$ für $\varrho > 0$ Punkte von Φ_0 und für $\varrho < 0$ Punkte von Φ_1; p enthält höchstens einen Zug. Bei einem Drehhyperboloid muß wegen $|d_2 - d_3| = 3a - \varrho$ wenigstens $d_1 = \varrho$ positiv sein; von p liegt ein Zug auf Φ_2 und einer auf Φ_3 oder p enthält nur komplexe Punkte von Φ.

Die Fernkurven der Flächen

$$(F_1, \varrho) \ldots (x-e)^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0 \tag{8}$$

$$(F_2, F_3, 3a-\varrho) \ldots \left(\frac{3a-\varrho}{2}\right)^2 \left[\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + z^2\right] + \left[\left(\frac{3a-\varrho}{2}\right)^2 - \frac{3e^2}{4}\right] y^2 -$$

$$- \left(\frac{3a-\varrho}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{3a-\varrho}{2}\right)^2 - \frac{3e^2}{4}\right] = 0 \tag{9}$$

berühren sich in den Kreispunkten $\mathfrak{J}_1$ und $\overline{\mathfrak{J}}_1$ von σ_1. Daher berührt p den absoluten Kegelschnitt in $\mathfrak{J}_1$ und $\overline{\mathfrak{J}}_1$. Der Normalriß p' von p auf σ ist daher eine zu σ_1 symmetrische Parabel, und der Normalriß p'' von p auf σ_1 ist ein zu σ symmetrischer Kreis (Abb. 3). Durch Elimination von z^2, bzw. y^2 aus (14) und (15) ergibt sich

$$p' \ldots y^2 = \frac{(3a-\varrho)^2}{e}\left[x - \frac{(a-\varrho)(3a+\varrho)}{4e}\right], \text{ Brennpunkt } \left(\frac{a}{e}(3a-2\varrho), 0, 0\right) \tag{10}$$

$$p'' \ldots \left\{x - \left[e - \frac{(3a-\varrho)^2}{2e}\right]\right\}^2 + z^2 = -\frac{2a}{e^2}\left(\varrho - \frac{3a}{2}\right)(\varrho - 3a - e\sqrt{3}) \cdot$$

$$\cdot(\varrho - 3a + e\sqrt{3}). \tag{11}$$

Die Kugel (F_1, ϱ) schneidet Φ außerdem in einer Raumkurve 4. Ordnung $\bar{p}$, die sich aus (8) und (9) ergibt, wenn ϱ durch $-\varrho$ ersetzt wird. $\bar{p}$ ist also der Schnitt der Kugel $(F_1, -\varrho)$ mit der Drehfläche 2. Grades $(F_2, F_3, 3a + \varrho)$. Enthält $\bar{p}$ reelle Punkte, so liegen sie bei positivem ϱ auf Φ_1.

Φ wird also durch eine (1,2)-*Korrespondenz zwischen den Kugeln um F_1 und den Drehflächen 2. Grades mit den Brennpunkten F_2 und F_3* erzeugt. Dies trifft auch zu, wenn die Punkte F_i ein beliebiges Dreieck bilden.

Für $\varrho = 0$ folgt: Der Minimalkegel aus F_1 berührt Φ längs der Schnittkurve $p_0 = \bar{p}_0$ des Minimalkegels mit der Drehfläche $(F_2, F_3, 3a)$ (p_0' und p_0'' in Abb. 5), daher sind die F_i auch im projektiven Sinne

Brennpunkte von Φ. Da jede Minimalgerade durch F_1 zwei Punkte von p_0 enthält, gehören die Minimalkegel aus F_i zur *Doppeltorse* von Φ.

Es gibt drei Werte $\varrho = \varrho_\nu$, für die p'' nach (10) ein Nullkreis wird und p in zwei Kegelschnitte in Minimalebenen zerfällt, die den absoluten Kegelschnitt in $\mathfrak{J}_1$, bzw. $\overline{\mathfrak{J}}_1$ berühren („*parabolische Kreise*", siehe Abb. 5; l_ν ist der Schnitt der zugehörigen Kugel (F_1, ϱ_ν) mit σ, e_ν ist der Meridian des zugehörigen Drehellipsoids):

a) $\varrho_1 = \dfrac{3a}{2}$ ergibt die parabolischen Kreise mit dem Grundriß p_1' (Scheitel $(-\dfrac{9a^2}{16e}, 0, 0)$, Brennpunkt U). Für den Schnittpunkt von Φ_2 mit dem Umkreisbogen F_1F_2 gilt, wenn er vorhanden ist, $d_1 - d_2 + d_3 = 3a$ und $d_1 + d_2 - d_3 = 0$, also $d_1 = \dfrac{3a}{2}$, analog für die übrigen 5 Schnittpunkte von Φ mit dem Umkreis. Aus (10) folgt, daß Φ die Kugeln $(F_i \dfrac{3a}{2})$ in den Punkten auf f berührt.

b) $\varrho_{2,3} = 3a \pm e\sqrt{3}$ ergibt die parabolischen Kreise mit dem Grundriß p_2', bzw. p_3'. Die zugehörige Drehfläche $(F_2, F_3, \mp e\sqrt{3})$ zerfällt in die beiden Minimalebenen durch $[F_2F_3]$. Diese schneiden die Kugeln $(F_1, 3a \pm e\sqrt{3})$ in je einem parabolischen Kreis und sie berühren Φ in ihren Schnittpunkten mit $[F_2F_3]$. Abb. 5 enthält p_1, p_2, p_3 und die Kurven $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, die zu $\varrho = -\dfrac{3a}{2}$, bzw. $\varrho = -3a \mp e\sqrt{3}$ gehören.

Φ enthält also 18 parabolische Kreise, je 6 berühren den absoluten Kegelschnitt in den Kreispunkten einer der Ebenen σ_i.

Φ enthält noch andere Raumkurven 4. Ordnung, z. B. die Schnittkurven mit den Kugeln $x^2 + y^2 + z^2 - 2ex - 2\eta y = b^2$ durch einen Doppelkreis k_1. Deren Grundrisse sind die Parabeln $[2e\eta x + (\eta^2 - e^2)y]^2 + 4a^2(\eta^2 - 3e^2)(3ex + \eta y) = 0$. In den Punkten von k_1, für die $x = 3a^2(3a^2 - \eta^2) : e\eta^2$ ist, berührt Φ diese Kugel. Hieraus folgt, daß die Flächennormalen von Φ längs eines Doppelkreises eine Regelfläche 6. Grades bilden.

8. Mehrfache Tangentialebenen der Fläche. Umrißkurven.

Die Parabeln p' (10) umhüllen die *Steiner*sche *Hypozykloide*

$$[e^2(x^2 + y^2) + 9a^4]^2 + 8a^2e^3x(x^2 - 3y^2) = 108a^8. \qquad (12)$$

Deren Spitzentangenten schneiden sich in U, die Spitzen liegen in σ_i im Abstand $\frac{3a^2}{e}$ von U. (10) und (12) berühren sich in den Punkten $\left(\frac{3a^2-\varrho^2}{2e}, \pm\frac{\sqrt{(a+\varrho)(3a-\varrho)^3}}{2e}, 0\right)$, deren Tangenten durch $(-\frac{a\varrho}{e}, 0, 0)$ laufen. Z. B. berührt p_0' die Hypozykloide in den beiden Spitzen auf σ_2 und σ_3. Die Abb. 3, 4, und 5 enthalten diese Hypozykloide. Die erstprojizierenden Ebenen durch ihre Tangenten berühren Φ in zwei zu σ symmetrischen Punkten und gehören daher zur Doppeltorse von Φ. Nach 5. treten unter diesen Doppeltangentialebenen auch solche mit reellen Berührpunkten auf, wenn $\frac{a}{e}$ zwischen $\sqrt{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}$ liegt.

Die Kreise p'' (11) hüllen eine Kurve 6. Ordnung $12e^4(x^2+z^2)z^4+\ldots=0$ ein, die p'' in den Punkten mit $x=\frac{3a^2-\varrho^2}{2e}-\frac{e\varrho}{3a-\varrho}$ berührt. Sie besteht aus einem Oval, dem Umriß von Φ_2 und Φ_3 bei der Projektion von Φ auf σ_1, und für kleinere Werte von $\frac{a}{e}$ aus einem weiteren Zug, dem Umriß von Φ_1. Die aufrißprojizierenden Ebenen, die diese Kurve berühren, gehören zur Doppeltorse von Φ. Zwei weitere kongruente Zylinder von Doppeltangentialebenen folgen daraus durch Drehung um u durch $\pm 120^0$. Diese drei Zylinder haben die Tangentialebene im höchsten und die im tiefsten Punkt von s_1 gemein; diese Ebenen sind *dreifache Tangentialebenen* von Φ.

9. Konfokale Flächen Φ.

Zwei Flächen Φ $(\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3 = 3a)$ und Φ' $(\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3 = 3a')$ mit denselben Brennpunkten schneiden sich im zwanzigfach gezählten absoluten Kegelschnitt und in sechs Raumkurven 4. Ordnung, nämlich (wenn etwa $a > a'$ ist) in den Schnittkurven jeder der sechs Kugeln $(F_i, \frac{3a \pm 3a'}{2})$ mit der zugehörigen Drehfläche 2. Ordnung $(F_k, F_l, \frac{3a \mp 3a'}{2})$.

Rückt a' gegen a, so liefern die Kugeln $(F_i, 3a)$ die Doppelkreise k_i als Schnittkurven benachbarter Flächen Φ, und die Nullkugeln $(F_i, 0)$

liefern die Kurven, längs deren Φ von den Minimalkegeln aus F_i berührt wird. *Die Hüllfläche aller konfokalen Flächen Φ besteht daher aus den doppeltgezählten Ebenen σ_i und aus den Minimalkegeln F_i.*

10. Tangentialebenen der Fläche. Dupinsche Indikatrix.

P liege auf der Schnittkurve p der Kugel (F_1, ϱ) mit der Drehfläche $(F_2, F_3, 3a - \varrho)$. Die *Flächennormale* n von Φ in P liegt in der Ebene durch die Flächennormalen von (F_1, ϱ) (diese geht durch F_1) und von $(F_2, F_3, 3a - \varrho)$ (diese hälftet den Winkel der Leitstrahlen). Analoges gilt für die durch P gehenden Kugeln (F_2, ϱ') und (F_3, ϱ'').

Man kann daher von P aus auf den Leitstrahlen $[P F_i]$ eine beliebig gewählte Strecke auftragen, z. B. auf der Verlängerung von $\overline{P F_i}$ oder gegen den Punkt F_i hin, je nachdem d_i in (1) addiert oder subtrahiert wird. n geht dann durch den Schwerpunkt des Dreiecks, das die Endpunkte der drei Strecken bilden. Abb. 3 zeigt diese Konstruktion.

Die Konstruktion gilt auch für einen Punkt P_1 von s; hier liegen die Leitstrahlen in σ. Sie gilt auch für einen Punkt P_2 eines Doppelkreises, z. B. k_2, wenn man P_2 einmal Φ_1 und einmal Φ_3 zurechnet (Abb. 3, Punkte P_1 und P_2). Sie gilt auch, wenn die Punkte F_i ein beliebiges Dreieck bilden.

Die Konstruktion zeigt ferner, daß die in 7. betrachteten Kugeln $(F_i, \frac{3a}{2})$ die Fläche in ihren Schnittpunkten mit dem Umkreis berühren. Ebenso berührt jede Kugel $(F_i, 3a \pm e\sqrt{3})$ die Fläche in ihren Schnittpunkten mit der Geraden durch die beiden anderen Brennpunkte.

Auch die *Schmiegebene* von p in P ergibt sich elementar[7], sie schneidet die Kugel (F_1, ϱ) im Krümmungskreis von p in P. Aus diesem folgt die Meusniersche Kugel zur Flächentangente von p in P. Macht man dasselbe mit zwei anderen Kurven 4. Ordnung, die durch P gehen, so erhält man aus drei Meusnierschen Kugeln die *Dupin*sche *Indikatrix* von Φ in P.

11. Zweite Gleichungsform. Projektive Erzeugung der Fläche.

$K_1 \equiv R^2 + 4ex = 0$ ist die durch k_2 und k_3 gelegte Kugel, die Kugel $K_2 \equiv R^2 - 2e(x - \sqrt{3}\, y) = 0$ enthält k_3 und k_1, die Kugel $K_3 \equiv R^2 - 2e(x + \sqrt{3}\, y) = 0$ enthält k_1 und k_2. $T \equiv R^4 - 4e^2 r^2 = 0$

[7] Siehe z. B. *H. Böheim*, Zur Konstruktion der Schmiegebene an die Raumkurve 4. Ordnung I. Art, Zschr. f. d. Realschulwesen, 1912.

ist der Torus durch k_1, k_2 und k_3. Durch Vergleich mit (5) folgt die Gleichung von Φ in der neuen Form

$$\Phi \equiv T^2 + 8\,a^2\,K_1\,K_2\,K_3 = 0. \tag{13}$$

(13) zeigt die *Erzeugung von Φ durch die projektiven Flächenbüschel*

$$T - 8\,a^2\,\lambda\,K_1 = 0, \quad K_2\,K_3 + \lambda\,T = 0. \tag{14}$$

Das erste Büschel besteht aus allgemeinen Zykliden durch k_2 und k_3, das zweite aus Zykliden, die T längs k_1 berühren und durch k_2 und k_3 gehen, also in D_1 und D_2 Doppelpunkte haben. Entsprechende Zykliden beider Büschel schneiden sich in einer Raumkurve 4. Ordnung, die sich für $\varrho = (2\,\lambda + 3)\,a$ auch aus (8) und (9) ergibt. Das zweite Büschel enthält für $\varrho = (3\,a^2 - e^2) : 2\,a$ auch eine *Dupin*sche Zyklide (Abb. 5 zeigt deren Schnittkreise k_4 und $\bar{k}_4$ mit σ; die zugehörige Kurve p_4' hat den Brennpunkt F_1).

12. Weitere Gleichungsformen. Beziehung zur Steinerschen Fläche.

Aus (13) folgt wegen

$$R^2 = \frac{1}{3}(K_1 + K_2 + K_3), \quad x = \frac{1}{12\,e}(2\,K_1 - K_2 - K_3),$$

$$y = \frac{1}{4\,e\sqrt{3}}(K_2 - K_3), \quad T \equiv \frac{1}{3}(K_1\,K_2 + K_2\,K_3 + K_3\,K_1), \tag{15}$$

$$\Phi \equiv (K_1\,K_2 + K_2\,K_3 + K_3\,K_1)^2 + 72\,a^2\,K_1\,K_2\,K_3 = 0. \tag{16}$$

Die Werte K_i sind die trisphärischen Koordinaten[8] des Flächenpunktes bezüglich der Kugeln K_i. Dies zeigt zunächst, daß jeder reelle Flächenpunkt innerhalb einer oder aller drei Kugeln K_i liegt (Ovale Φ_1, Φ_2, Φ_3, bzw. Φ_0). Auch folgt, daß die Kugeln K_i für große a die Ovale Φ_i besser annähern als die in 6. gefundene Kugel $(U, 3\,a)$ (vgl. Abb. 5, Φ_3, K_3).

Setzt man $K_0 \equiv -K_1 - K_2 - K_3 - 36\,a^2 \equiv -3\,(x^2 + y^2 + z^2 + 3\,a^2 + e^2)$, so folgt

$$\Phi \equiv K_1^2\,K_2^2 + K_2^2\,K_3^2 + K_3^2\,K_1^2 - 2\,K_0\,K_1\,K_2\,K_3 = 0. \tag{17}$$

Dies zeigt, daß Φ zu jenen Flächen gehört, deren birationale Charaktere *L. Godeaux*[9] bestimmt hat. (17) zeigt ferner, daß Φ in tetrasphärischen Koordinaten K_0, K_1, K_2, K_3[8] dieselbe Gleichung hat wie die *Steiner*sche

[8] Vgl. z. B. Enzyklopädie d. math. Wiss. III, AB 7 (*E. Müller*), S. 661.

[9] *L. Godeaux*, Sur une surface algébrique du huitième ordre, Tôhoku Math. J. 37, (1933), S. 122–126.

Fläche 4. Ordnung in projektiven Koordinaten. *Φ und die Steinersche Fläche hängen daher ebenso zusammen wie das Poincarésche und das Cayley-Kleinsche Modell der nichteuklidischen Geometrie des Raumes*[10], *nämlich durch die räumliche Darbouxsche Verwandtschaft. Die Fläche Φ ist das moebiusgeometrische Seitenstück zur Steinerschen Fläche der projektiven Geometrie.*

Die andere bekannte Gleichungsform der *Steiner*schen Fläche erhält man, wenn man die Fernebene F_0 und die Nullkugeln F_i als Grundkugeln eines anderen Systems tetrasphärischer Koordinaten F_ν nimmt und (1) in der Form

$$\sqrt{F_0} + \sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} + \sqrt{F_3} = 0 \tag{18}$$

schreibt. Man kann daraus Eigenschaften von Φ herleiten. Z. B. ergibt sich aus den Tangentialschnitten der *Steiner*schen Fläche, daß jede Kugel, die Φ in zwei zu σ symmetrischen Punkten berührt, die Fläche in zwei Raumkurven 4. Ordnung schneidet; es gibt also ∞^2 *Raumkurven 4. Ordnung I. Art auf Φ*. Auch ergibt sich so eine einfache *Parameterdarstellung von Φ*. I. allg. ist aber die direkte Untersuchung von Φ günstiger.

13. Eine inverse Fläche 5. Ordnung.

Φ geht durch Inversion i. a. in eine Fläche 8. Ordnung mit denselben Singularitäten über. Ist $b^2 > 0$ und liegt das Inversionszentrum in D_1, so spalten sich dessen Tangentialebenen ab und es bleibt eine Fläche 5. Ordnung φ. Aus Φ_1, Φ_2, Φ_3 werden drei unpaare Flächenmäntel von φ, aus Φ_0 wird ein Oval von φ. Ist der Inversionsradius $b\sqrt{2}$, also

$$1 : x : y : z \longrightarrow [x^2+y^2+(z-b)^2] : 2\,b^2\,x : 2\,b^2\,y : b\,(x^2+y^2+z^2-b^2), \tag{19}$$

so geht zugleich D_2 in U über und φ lautet

$$b^2\,[e^2\,(x^2+y^2) - b^2\,z^2]^2 + 2\,a^2\,[2\,e\,x + b\,z]\,[e\,(x - \sqrt{3}\,y) - b\,z]\,.$$
$$.\,[e\,(x+\sqrt{3}\,y) - b\,z]\,[x^2+y^2+(z-b)^2] = 0. \tag{20}$$

Den Kugeln K_i entsprechen Ebenen, den Doppelkreisen von Φ entsprechen drei Doppelgeraden durch den triplanaren dreifachen Punkt U von φ. φ schneidet die Fernebene im absoluten Kegelschnitt und in den Geraden durch die Fernpunkte je zweier Doppelgeraden. φ ist symmetrisch bezüglich σ_i und anallagmatisch bezüglich der zu σ inversen Kugel (U, b).

[10] Über diesen Zusammenhang vgl. *F. Klein*, Vorl. ü. nichteuklidische Geometrie, Grundlehren Bd. XXVI (1928), S. 299ff.

14. Eine räumliche Involution mit der Koinzidenzfläche Φ.

A sei ein allgemeiner Raumpunkt. Der Kreis a durch D_1, D_2 und A schneidet Φ noch in zwei zu σ symmetrischen Punkten P_1 und P_2. A' liege harmonisch zu A bezüglich P_1 und P_2 auf a. Die Zuordnung $A \leftrightarrow A'$ ist eine Involution, bei der die Kreise durch D_1 und D_2 invariant sind, ebenso jede Kugel oder Ebene durch D_1 und D_2. Einem Punkt B von σ entspricht der Gegenpunkt auf dem Kreis durch D_1, D_2 und B. σ geht also in sich über und erfährt die Inversion am Kreis $(U, b\,i)$. U entspricht in konformer Auffassung „der" Fernpunkt des Raumes.

Fallen P_1 und P_2 (in einem Punkt von s) zusammen, so artet die Involution auf dem Kreis durch D_1 und D_2 aus, einem Punkt P von s entspricht der ganze Kreis durch D_1, D_2 und P. Die Punkte von s sind also Hauptpunkte der Verwandtschaft. Von der Kurve g', die einer Geraden g durch U in σ entspricht, spalten sich die Hauptkreise zu den 8 Schnittpunkten von g mit s ab, im übrigen geht g in sich über. Daher hat die Involution in jeder Ebene durch u die Ordnung 17.

Durch die Inversion $\Phi \longrightarrow \varphi$ wird daraus eine *Jonquières*sche Involution mit der Koinzidenzfläche φ. Jede Gerade durch U bleibt fest, entsprechende Punkte liegen harmonisch zu den von U verschiedenen Schnittpunkten mit φ. Jede Ebene durch eine Doppelgerade von φ enthält eine *Jonquières*sche Involution. Deren Zentrum ist U, Koinzidenzkurve ist eine elliptische c_3 durch U. Hauptpunkte sind die Berührpunkte der Tangenten aus U an φ, die Tangenten sind die Hauptstrahlen. Faßt man in (20) die Glieder i.Grades zum Polynom φ_i zusammen, so schneidet φ die Gerade $\xi = t\,x$, $\eta = t\,y$, $\zeta = t\,z$ durch (x, y, z) und U in den durch $\varphi_3 + t\,\varphi_4 + t^2\,\varphi_5 = 0$ gegebenen Punkten. Die Hauptstrahlen bilden den Kegel $\varphi_4^2 - \varphi_3\,\varphi_5 = 0$, seine Erzeugenden berühren φ in den Hauptpunkten, und diese liegen auf der Kugel (U, b), die aus σ hervorgeht.

Auf einer Geraden durch U ist die Verwandtschaft $t \longrightarrow t'$ durch $\varphi_3 + \tfrac{1}{2}(t + t')\,\varphi_4 + t\,t'\,\varphi_5 = 0$ gegeben. $t = 1$ ergibt die Darstellung der Involution an φ,

$$1 : x' : y' : z' = [-2\,\varphi_3(x, y, z) - \varphi_4(x, y, z)] : x\,[\varphi_4(x, y, z) + 2\,\varphi_5(x, y, z)] :$$
$$: y\,[\varphi_4(x, y, z) + 2\,\varphi_5(x, y, z)] : z\,[\varphi_4(x, y, z) + 2\,\varphi_5(x, y, z)]. \quad (21)$$

Mittels (19) folgt daraus die Darstellung der Involution an Φ. Diese Involution hat die Ordnung 20.

Buchbesprechungen.

Gesammelte mathematische Abhandlungen. Von *L. Schläfli*. Band I. 392 S. Basel: E. Birkhäuser. 1950. sfr. 54.—.

Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft hat mit der Herausgabe der gesammelten Abhandlungen des 1895 verstorbenen vielseitigen und gedankenreichen Mathematikers eine dankenswerte Aufgabe unternommen. Der vorliegende erste Band — zwei weitere sind in Aussicht genommen — ist vorzüglich ausgestattet und mit einem Bildnis Schläflis geschmückt. Er enthält neben kleineren Arbeiten vermischten Inhalts aus den Jahren 1846—1849, vor allem zwei bedeutende Abhandlungen, die im „Archiv" 1850 erschienene Arbeit „Über die Begründung der Theorie der elliptischen Funktionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelprodukte", in der Schläfli, durch Eisenstein und Cayley angeregt, unter reichlicher Verwendung anschaulich-geometrischer Betrachtungen die durch die bedingte Konvergenz der Eisensteinschen Reihen auftretenden Schwierigkeiten überwindet und zu einer alle wesentlichen Teile der Theorie der elliptischen Funktionen umfassenden Darstellung gelangt, und die aus den Jahren 1850—1852 stammende Arbeit „Theorie der vielfachen Kontinuität", die, wegen ihres großen Umfanges von der Wiener Akademie 1852 zurückgewiesen, aus dem gleichen Grund auch im Crelleschen Journal nicht gedruckt wurde und erst 1901, also sechs Jahre nach dem Tod des Verfassers, aus dem Nachlaß zur Veröffentlichung gelangte. Den Inhalt der Arbeit bildet, kurz gesagt, die systematische Begründung der Euklidischen Geometrie des n-dimensionalen Raumes und zwar sowohl hinsichtlich der linearen und quadratischen Mannigfaltigkeiten, wie auch einiger differentialgeometrischer Fragestellungen. Insbesondere wird der Kugel ein umfangreiches Kapitel gewidmet, dessen Hauptziel die Inhaltsbestimmung des sphärischen Simplexes bildet, die der Verfasser mit großem Scharfsinn durchführt. Es gelingt ihm, diesen Inhalt durch die Winkel auszudrücken, welche die das Simplex aus der Kugel ausschneidenden linearen Mannigfaltigkeiten miteinander einschließen, also die bekannte Inhaltsbestimmung des sphärischen Dreieckes auf den n-dimensionalen Fall zu übertragen — eine erstrangige Leistung, die allein das unglückliche Schicksal dieser auch sonst höchst gedankenreichen und anregenden Arbeit aufs lebhafteste bedauern läßt. Die hoffentlich in naher Zukunft erscheinenden weiteren Bände werden in gleicher Weise, wie der vorliegende, dazu beitragen, die Bedeutung Schläflis in das verdiente helle Licht zu rücken.

J. Radon, Wien.

Introduction to the Theory of Finite Groups. Von *W. Ledermann*. VI, 152 S. Edinbourgh und London: Oliver and Boyd. 1949. 8 s. 6 d. net.

Dieses Buch stellt eine sehr gute Einführung in die Theorie dar, welche unseren Studenten empfohlen werden kann, denn gerade an leicht verständlichen Büchern über Gruppentheorie herrscht Mangel. Außer den grundlegenden Begriffen und Sätzen werden die Sylowgruppen und Abelschen Gruppen gebracht,

also gerade das, was der Studierende für die Algebra und Zahlentheorie benötigt. Die Darstellung ist ausführlich und klar. Wir geben noch eine Kapitelübersicht: 1. Gruppenbegriff, 2. Komplexe und Untergruppen, 3. Permutationsgruppen, 4. Normalteiler, 5. Sylowgruppen und p-Gruppen, 6. Abelsche Gruppen.

E. Hlawka, Wien.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung in die Methoden zu ihrer Lösung. Von *G. Poppović*. Mit 7 Textabb., VII, 56 S. Wien: F. Deuticke. 1950. S 12.—.

Im Vorwort schreibt der Verfasser: „Die Differential- und Integralrechnung dient — abgesehen von Flächenbestimmungen — nur dem Zweck der Lösung von Differentialgleichungen". Alles Folgende ist viel besser als man zunächst befürchtet. Das kleine Buch bringt die elementaren Integrationsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen, ferner lineare Differentialgleichungen (hauptsächlich erster und zweiter Ordnung). Die Darstellung ist breit, leicht verständlich, und somit für Ingenieure sehr geeignet. Manchmal wird dem Leser etwas vorgesetzt, was er ohne Begründung glauben soll (z. B. Anzahl der Anfangsbedingungen und Randbedingungen, Anzahl der linear unabhängigen Lösungen). Die zahlreichen Beispiele aus der Elektrotechnik und der Mechanik werden dem Ingenieur sehr willkommen sein. Auf Seite 42 (Zeile 10—11) heißt es: „Die Wurzeln von Gleichungen höheren als vierten Grades müssen auf graphischem Wege bestimmt werden". Abgesehen davon, daß es auflösbare Gleichungen höheren Grades gibt, sind vor allem die numerischen Methoden empfehlenswert.

N. Hofreiter, Wien.

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Von *A. Duschek* und *A. Hochrainer*. In drei Teilen. II. Teil: Tensoranalysis. Mit 64 Textabb., VII, 338 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 78.—, sfr. 26.—, $ 6.—, DM 24.80.

Die analytische Methode kommt in der Tensoranalysis noch viel mehr zur Geltung als in der Tensoralgebra. Daher erklärt es sich, daß der zweite Teil, also die Tensoranalysis, wesentlich umfangreicher ist. Er enthält zunächst die Theorie der Kurven und Flächen des euklidischen Raumes, also die Anfangsgründe der Differentialgeometrie. Dann folgt die Theorie der Felder, die in verschiedenen Zweigen der Mathematik, der Physik und der Technik eine große Rolle spielen. Nach allgemeinen, grundlegenden Entwicklungen folgen speziell: das Laplace-Feld (quellen- und wirbelfrei), das Poissonsche Feld (wirbelfrei) und das Wirbelfeld (quellenfrei). Die letzten Abschnitte sind wieder der Differentialgeometrie gewidmet, und zwar: die Grundzüge der Riemannschen Geometrie, insbesondere die Bedeutung des Krümmungstensors und Anwendungen auf die Flächentheorie. — Die Darstellung ist anschaulich intuitiv, i. a. leicht verständlich, nicht immer exakt, aber stets tritt das Wesentliche hervor. Der eleganten Ableitung der Formeln folgt sofort die geometrische und physikalische Bedeutung. Entgegenkommenderweise werden auch viele Formeln in der symbolischen Schreibweise abgegeben.

N. Hofreiter, Wien.

Methoden der praktischen Analysis. Von *F. A. Willers*. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage (Göschens Lehrbücherei: Band 12). Mit 93 Textabb., 410 S. Berlin: W. de Gruyter u. Co. 1950. Geb. DM 24.—.

Es ist sehr erfreulich, daß das Standardwerk über praktische Analysis, also das Buch von Fr. A. Willers wieder erschienen ist. Es stellt eine Neubearbeitung sämtlicher Abschnitte dar. Sehr vorteilhaft ist, daß nun die kleinen

Abschnitte mit fett gedruckten Überschriften versehen sind. Weggelassen wurden die meisten graphischen Methoden, die ohnehin mehr akademischen als praktischen Wert haben. Sämtliche Abschnitte haben Ergänzungen erfahren, am meisten der Abschnitt über angenäherte Integration von Differentialgleichungen. Ich nenne: Angenäherte Integration von Integralgleichungen, angenäherte Berechnung von uneigentlichen Integralen, Kriterien von Routh und Bilharz, Lösung von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen durch Iteration, Eigenwerte und Eigenlösungen, graphische und numerische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen (teilweise neu, z. B. Nomogramm und Iterationsverfahren), das Differenzenverfahren, die zur Lösung von Differentialgleichungen und Berechnung von Eigenwerten viel benutzte Methode von Ritz, das Rayleighsche Verfahren zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes. Es ist allgemein bekannt, daß das Buch für die angewandten Mathematiker von unschätzbarem Wert ist und daher keiner Empfehlung mehr bedarf. Bei der nächsten Auflage möge die Numerierung der Formeln in Ordnung gebracht werden.

N. Hofreiter, Wien.

Einführung in die sphärische Astronomie. Von *A. Prey*. Mit 123 Textabb., VII, 316 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 75.—, geb. S 84.—; sfr. 24.—, geb. sfr. 26.—; $ 5.50, geb. $ 6.—; DM 22.—, geb. DM 24.—.

Diese repräsentative, aus langjähriger Vorlesungspraxis hervorgegangene Darstellung der Sphärik füllt eine empfindliche Lücke in der Fachliteratur aus. An äußerem Umfang gegenüber den älteren, längst vergriffenen Lehrbüchern von Brünnow und Herr-Tinter eher knapp zu nennen, steht sie ihnen an wesentlicher Vollständigkeit und wissenschaftlicher Gründlichkeit keineswegs nach. Ja, man findet bei Prey einige sehr schätzenswerte Zugaben, so die Kapitel über die Finsternisse, den geozentrischen Lauf der Planeten bis zum Lambertschen Satz über die Bahnkrümmung, die Sonnenuhren. In größere Kapitel hineinverwoben sind ferner die Sternbedeckungen, eine Erklärung der Kalenderkennzahlen samt der Julianischen Periode und manche weiteren Hinweise, die der Verfasser aus seiner vielseitigen wissenschaftlichen Bildung beigeben konnte. Die große Zahl klarer Zeichnungen und nicht weniger als dreißig durchgerechnete numerische Beispiele bilden eine bessere Erklärung als zuviele Worte. Angesichts solcher Vorzüge darf man es einer „Einführung" nicht zum Vorwurf machen, daß die fast nur für den Fachastronomen wichtige Auswertung astrographischer Aufnahmen unberücksichtigt geblieben ist. Eine wirklich zweckentsprechende Darlegung der hier einschlägigen Instrumente und Rechenmethoden wäre ohne sehr beträchtliche Umfangsvermehrung (und damit verbundene Preiserhöhung) nicht möglich gewesen. Der mustergültige Formelsatz und die vornehme Ausstattung des Buches verdienen ausdrückliche Anerkennung.

K. Ferrari d'Occhieppo, Wien.

Wirkungsquantum und Naturbeschreibung. Von *F. Hund*. (Deutsche Akademie der Wissenschaften in Berlin: Vorträge und Schriften: Heft 35) 18 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1949. DM 2.50.

Dieser Vortrag, welcher von dem bekannten Physiker anläßlich der Gedenkfeier für Max Planck am 1. Juli 1948 gehalten wurde, gibt eine Übersicht über die Entwicklung der klassischen Physik seit dem 17. Jahrhundert und ihrer Ergänzung durch die Quantentheorie. Der Verf. bringt deutlich die Bedeutung der Einführung des Wirkungsquantums durch Planck nicht nur für die

Physik, sondern für die Erkenntnistheorie überhaupt zum Ausdruck. Die Lektüre dieses sehr klar gehaltenen Vortrages ist jedem, der an wissenschaftlicher Forschungsarbeit Interesse hat, wärmstens zu empfehlen. *E. Hlawka*, Wien.

Calcul opérationnel. Von *É. Labin*. 149 S. Paris: Masson & Cie. 1949.

Der Verfasser plant eine Reihe von mathematischen Büchern herauszugeben, in denen aus der höheren Mathematik das zusammengestellt wird, was man in den Anwendungen braucht. Diese Bücher sollen keine Lehrbücher sein, sondern eine enzyklopädische Darstellung von Definitionen, Methoden und Lehrsätzen, ferner Formeln und Tafeln. Natürlich alles ohne Beweise. Jetzt ist das erste Buch erschienen (Operatorenrechnung). Klarerweise handelt dieses Buch in erster Linie von Laplace-Transformationen, Verallgemeinerungen und Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen. Der Plan des Verfassers, eine solche Serie von Büchern herauszugeben, ist sehr begrüßenswert.

N. Hofreiter, Wien.

The Principles of Symmetrical Components. An Introduction to the Elements of the Theory. Von *Ch. A. Grover*. Mit 22 Textabb., IV, 44 S. Manchester: Classifax. 1949. 4 s. net.

Das Heft behandelt die Berechnung der Ströme und Spannungen in Mehrphasen-Netzwerken. Insbesondere wird das normale Drehstromnetz untersucht, wobei 3 verschiedene komplexe Widerstände in Sternschaltung an den drei Phasen hängen. Die hierdurch entstehende unsymmetrische Belastung wird berechnet. Zunächst wird gezeigt, daß man sich jedes unsymmetrische 3-Phasensystem durch Überlagerung von drei symmetrischen 3-Phasensystemen entstanden denken kann, wobei eines positive Phasenfolge und das zweite negative Phasenfolge besitzt und das dritte gleichphasig ist. Eine derartige Zerlegung ermöglicht die Zurückführung des hier untersuchten allgemeinen unsymmetrischen Falls auf drei symmetrische Fälle, deren Behandlung ja bekannt ist.

Das Heft wurde hauptsächlich für Studierende der Elektrotechnik geschrieben und zeichnet sich durch eine besonders gründliche und klare Darstellung bei knappen Umfang aus. Zahlreiche genau durchgerechnete Beispiele zeigen die Anwendung der Theorie in der Praxis. *R. Herzog*, Wien.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). Basel: E. Birkhäuser.

Einer der rührigsten Verleger auf dem Gebiete der Mathematik ist der Verlag Birkhäuser in Basel (Schweiz). Dort erscheinen laufend wertvolle mathematische Bücher, die sehr beliebte Zeitschrift „Elemente der Mathematik" und nun die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik". Sie wird regelmäßig alle zwei Monate erscheinen und pro Heft einen Umfang von ca. 80 Seiten haben. Für die Güte der Arbeiten garantieren die hervorragenden Herausgeber. Diese Zeitschrift sucht die Lücke zwischen den der reinen Mathematik und der reinen Physik einerseits und den konstruktiven Ingenieurwissenschaften andererseits gewidmeten Zeitschriften auszufüllen. Sie will der Veröffentlichung von grundlegenden Forschungsarbeiten dienen, die auf der Anwendung mathematischer oder physikalischer Untersuchungsmethoden beruhen. Neben Originalarbeiten sollen regelmäßig auch zusammenfassende Berichte erscheinen, die den jeweiligen Stand der Erkenntnisse auf einem bestimmten Teilgebiet darstellen und die damit Ausgangspunkte für die weitere Entwicklung bilden können.

N. Hofreiter, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Die Welt der Vektoren

Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren

Von

Franz Ollendorff

Dr. Ing., Dipl. Ing.

Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums

The Hebrew Technical College, Haifa (Israel)

Mit 61 Textabbildungen. VIII, 470 Seiten

S 135.—, sfr. 39.—, $ 9.—, DM 37.50

Geb. S 144.—, sfr. 42.—, $ 9.50, DM 40.—

Vektoren und die aus ihnen abgeleiteten Größen höherer Ordnung sind seit langem ein ungemein leistungsfähiges, ja unentbehrliches Instrument der Physik geworden und nehmen heute auch auf dem Gebiet der praktischen Technik immer mehr an Bedeutung zu. Die Anwendungen der Vektorrechnung in Physik und Technik sind ohne Zahl. Der Verfasser zeigt nun in dem vorliegenden Buch, daß die bisher übliche Basis der Vektorlehre für die moderne Naturwissenschaft zu schmal geworden ist: in ihrem Bereich gilt es vor allem, sich von dem Zwang der dreidimensionalen Anschauung geistig zu befreien. Für diesen Erkenntnisprozeß stehen zwei mächtige Helfer zur Verfügung: der Tensorbegriff und der Operatorenkalkül; gerade sie aber sind in den klassischen Darstellungen meist stiefmütterlich behandelt worden. Demgegenüber führt der Verfasser den Leser in großangelegter Darstellung von den einfachsten geometrischen Grundbegriffen und Vorgängen in dem uns vertrauten euklidischen Raum bis mitten in die abstrakte Quantenwelt und die vektorielle Behandlung statistischer Erscheinungen, wie sie sich vor allem auf dem Gebiet der modernen Mikrophysik als fruchtbar erwiesen hat. Zur Erreichung eines tieferen Verständnisses weicht er dabei in verschiedenen Fragen, wie z. B. in der Konzeption des Vektorproduktes, des Rotorbegriffes u. a., bewußt von der traditionellen Fassung ab. Zahlreiche, teils erstmalig behandelte Anwendungen ergänzen die Entwicklung der mathematischen Methodik und vermitteln dem Leser ein anschauliches Bild der grundlegenden Gedankengänge.

Inhaltsübersicht: Skalare und Vektoren. — Vektorfelder. — Vektorrechnung in affinen Koordinaten. — Algebra der Tensoren. — Tensoranalysis im affinen Raum. — Der Minkowskische Raum. — Der Riemannsche Raum. — Der Hilbertsche Raum.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria